Libros de Cátedra

ANTROMÁTICA

Aporte para la formación en Matemática de estudiantes de Antropología y Profesorado de Biología

Viviana Cappello y Romina Herrera (coordinadoras)



FACULTAD DE
CIENCIAS NATURALES Y MUSEO





ANTROMÁTICA

APORTE PARA LA FORMACIÓN EN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES DE ANTROPOLOGÍA Y PROFESORADO DE BIOLOGÍA

Viviana Cappello
Romina Herrera
(coordinadoras)

Facultad de Ciencias Naturales y Museo





Agradecimientos

Escribir un libro de divulgación es tarea muy complicada, o al menos resultó serlo para nosotros. No sabemos si habremos logrado un balance justo entre el rigor y la claridad de los argumentos; entre el atractivo de los ejemplos y su importancia para los temas expuestos; y un nivel de exposición que haga accesibles a los alumnos los temas tratados, sin degradarlos y convertirlos en trivialidades. Si este balance se obtuvo, será en buena medida gracias a un gran número de personas que influyeron en nuestra formación como docentes.

Queremos manifestar nuestro agradecimiento a quienes, directa o indirectamente, contribuyeron al resultado del libro, ya que sería imposible mencionarlos a todos.

A nuestros estudiantes de los cursos de antropología y profesorado de biología que soportaron por varios cuatrimestres con clases pseudo experimentales, que en buena medida era un intento de exponer a la crítica puntos de vista e ideas nuestras. Muchísimo de lo que aprendimos compartiendo estos cursos aparece ahora en el libro.

A nuestras familias, que nos acompañan en el crecimiento profesional de manera silenciosa, no por eso menos importante.

Gracias a todos ellos.

Índice

Introducción

Resulta necesario acompañar la trayectoria de los estudiantes con un material acorde a las características particulares que presenta la materia. Una matemática contextualizada a las carreras de los alumnos, y en función del tiempo de duración del curso. La matemática y la lengua materna, son fundamentales en el desarrollo de los estudiantes y son conocidas como las áreas que en forma especial ayudan a aprender a aprender y a aprender a pensar. Además, dan al estudiante incumbencias necesarias para incorporarse en el mercado laboral.

Aquí intentaremos que la matemática ya no sea un “dolor de cabeza”.

Hace varios años en la cátedra, se vienen diseñando distintas estrategias para mejorar la calidad de enseñanza en pos del aprendizaje de los alumnos y en función de poder utilizar a la matemática como una herramienta general en su quehacer profesional.

La posibilidad de tener, de antemano, el material que guiará la cursada, no sólo da el marco para trabajar en el aula, sino que posibilita fuera de ella seguir la lógica de la actividad presencial, pudiendo revisar con mayor detalle y haciendo previsiones para la próxima clase.

La relevancia de dicho material reside en la presentación de una situación del ámbito de las carreras a resolver, siendo necesaria para la misma la utilización de los elementos de matemática.

La forma como se aprende, se convierte en la forma como se vive la matemática.

El compromiso con los ideales democráticos se alcanza si en el aula se trabaja en un ambiente donde es posible la discusión y la argumentación sobre las diferentes ideas. Lo cual favorece el desarrollo individual, como medio de autonomía intelectual, al tomar conciencia del proceso constructivo de la matemática para intervenir en la realidad.

En cuanto a los nexos con el mundo externo, es importante trabajar con miras a preparar graduados para desempeñarse en la sociedad, y que sean aptos para la investigación, el ejercicio de la docencia y la aplicación de la tecnología. Esto último es lo que pretende el presente libro; darle al estudiante la posibilidad de tener al alcance de sus manos, un material guiado sobre los contenidos que necesita apropiar a la hora de cursar Elementos de Matemática.

Prólogo

A lo largo de mis años como estudiante de Matemática los estudiantes le preguntamos muchas veces a nuestros docentes "¿De dónde puedo estudiar este tema?" Invariablemente la respuesta era "De la bibliografía que figura en el programa", cosa que si bien era cierta presentaba un sinnúmero de dificultades: el acceso a los libros era muy limitado, a veces por su costo, o por no existir suficientes ejemplares en la biblioteca, o porque sencillamente esos textos no podían conseguirse por estar agotados.

Nuestra frustración se conformaba entonces con tomar apuntes en clase (que siempre eran incompletos) y comprar los apuntes (en esa época mimeografiados) del Centro de Estudiantes que los confeccionaba con arduo trabajo, sin poder evitar errores que ocasionaban largas pérdidas de tiempo tratando de interpretar lo escrito por otros.

Más recientemente el acceso a Internet y las fotocopiadoras posibilitaron una mejora sustancial en conseguir el material de estudio, pero a costa de hacer crecer la información disponible en forma incontrolada, por lo que su depuración insume valioso tiempo necesario para estudiar.

Algunas cátedras, (las menos) contaban con apuntes "oficiales" de temas revisados por los docentes de la misma, y muy pocas de ellas tenían un LIBRO DE LA CATEDRA.

Afortunadamente hoy la UNLP brinda la oportunidad de publicar esos textos que siguen el programa de las materias confeccionados por los mismos docentes que están al frente de ellas.

En el caso particular de Matemática las dificultades son muchas:

Una gran variedad de temas de la disciplina que se encuentran desperdigados en Algebra, Geometría Analítica, Análisis Matemático, etc. son la base de las aplicaciones a las Ciencias Naturales, y deben ser estudiados, comprendidos y aprehendidos con cierta solvencia en el lapso de un ciclo lectivo por nuestros estudiantes.

Por otro lado, es necesario mostrar a los alumnos aplicaciones de esos conceptos eligiendo ejemplos de las Ciencias Naturales cuya complejidad no sea tan grande como para "tapar" la posibilidad de su resolución por ser demasiado largo el proceso de cálculo.

Al mismo tiempo, los ejemplos deben ser motivadores desde las disciplinas científicas que se estudiarán y no simples aplicaciones de lo enunciado, para no caer en eso de que "si la única herramienta que tengo es un martillo todo lo demás debe ser necesariamente un clavo" y las soluciones son sólo mecanización de un procedimiento.

En este texto se resuelven con éxito todas las cuestiones enunciadas:

Unir los conceptos necesarios de la Matemática sin entrar en rigurosas demostraciones, que interesantes per se ocupan mucho tiempo, sin perder de vista el entrenamiento de cálculo necesario.

Presentar ejemplos de las Ciencias Naturales motivadores cuya resolución matemática lleve indefectiblemente a la posterior discusión de los resultados y su validación.

Una gradación sistemática de dificultad en los trabajos propuestos, que por su variedad podrían clasificarse en ejercitaciones, (resolución automática) problemas (traducción a lenguaje matemático del enunciado, resolución, discusión del resultado) y cuestiones (situaciones que requieren una pequeña investigación y búsqueda de datos para poder resolverlas, tal como es necesario en la investigación científica).

Es por todo esto que el Libro de Cátedra que hoy se presenta es un acertado aporte que ayudará a la formación de los futuros profesionales, ahorrando tiempo valioso por contener casi toda la información y ejercitación necesarias en un solo lugar, sin perjuicio de las adendas actualizadoras que necesariamente habrán de producirse en el futuro.

Prof. Ricardo Alberto MASSUCCO
La Plata, septiembre de 2016

Capítulo 1
Números

Romina Herrera, Anyelen Di Paolantonio y Guillermo Lamenza

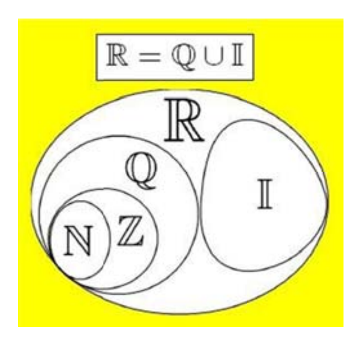
Números Reales

Nuestro sistema de numeración se compone de varios conjuntos numéricos. El primero que conocemos en los primeros aprendizajes es el de los **números naturales**. Son aquellos que utilizamos para contar y ordenar: $1,2,3,\ldots$

La ampliación de este conjunto numérico está dada por la inclusión del cero y los números que llamamos **negativos:** $0,-1,-2,-3,-4,\ldots$ A la unión de estos conjuntos mencionados la llamamos conjunto de los **números enteros.** Así, los enteros son $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$

Sin embargo, este conjunto no es suficiente para describir cualquier situación de la cotidianeidad. Para ello debemos considerar a los números denominados **racionales** que son aquellos que pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros: $\frac{a}{b}, b\neq 0$.
Estos números también se pueden escribir en forma decimal, es decir efectuando la división entre el numerador y el denominador de dicha fracción. De esta manera obtenemos números decimales con finitas cifras decimales: $-\frac{3}{4}=-0,75$, o con infinitas cifras decimales periódicas: $\frac{5}{7}=0,714285714\ldots$ donde, luego de cierta cifra decimal, la secuencia se repite.

Este conjunto numérico contiene a los dos mencionados anteriormente ya que a todo entero m se lo puede escribir como $\frac{m}{1}$.

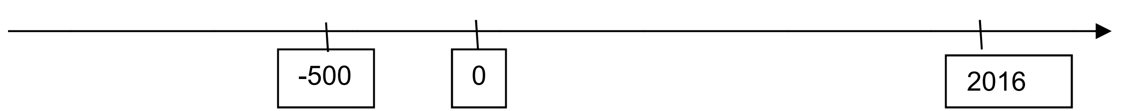


No obstante, hay números que no pueden ser expresados como racionales, es decir como cociente de dos números enteros. A estos números los denominamos **números irracionales** y

tienen la característica de tener infinitas cifras decimales no periódicas. Algunos con los que estamos más familiarizados son: $\sqrt{2} = 1,4142...$ o e=2,71.

La unión del conjunto de los números racionales con los irracionales da por resultado el conjunto de los **números reales**.

En antropología muchas veces tenemos que referirnos a hechos que sucedieron en el pasado. Existen diversas maneras de medir el tiempo y de posicionar algún evento en un punto dentro de un eje temporal. Tal vez el más conocido, de uso en la vida cotidiana, refiere a la utilización del nacimiento de Cristo como punto de partida para contabilizar el paso del tiempo. Así, dentro de ese marco de medición, en este momento estamos en el año 2016 d.C. (después de Cristo). Del mismo modo, si queremos referir a un hecho sucedido con anterioridad a nuestro punto de partida, como por ejemplo el comienzo del Periodo Inicial en el Valle del Hualfín, decimos 500 a.C. (alrededor de 500 años antes de Cristo). Si graficamos estos años en una recta numérica veremos que cuando decimos 500 años antes de Cristo estaremos representando -500, un número negativo.



Otra manera de medir el tiempo, siempre desde la óptica de la temporalidad occidental, está en relación con el desarrollo del método de datación radiocarbónica. En este caso el punto de partida es 1950.

Para conocer un poco más la historia de los números: "La maravillosa historia de los números" http://hdl.handle.net/10261/112435

Algunos ejemplos del uso de los números:

- "Se estudia la estructura de la población prehistórica del NOA a través del análisis de la variabilidad fenotípica a nivel regional. La muestra está constituida por 961 individuos deformados y no deformados artificialmente, de ambos sexos, de edades post-reproductivas, pertenecientes a cuatro subregiones (Puna, Quebrada de Humahuaca, Valliserrana y Selvas Occidentales). Se emplearon 35 caracteres métricos del neuro y esplacnocráneo. Se muestran algunos datos en la siguiente tabla:"

Tabla 1. Noroeste Argentino. Composición de la muestra empleada de acuerdo con la subregión, el sexo, la edad y la deformación artificial

	Puna [1]	Quebrada [2]	Valliserrana [3]	Selvas [4]	Total
Sexo					
Masculino	155	213	116	25	509
Femenino	188	151	94	19	452
Edad					
Adulto	187	195	88	21	491
Maduro	143	152	120	14	429
Senil	13	17	2	9	41

Fuente: Varela y otros, 2004, p. 321.[1]

[1] La variabilidad entre poblaciones se evaluó mediante el empleo de diferentes técnicas de análisis estadístico multivariado, tales como análisis discriminante, D2 de Mahalanobis, análisis de agrupamiento, y correlación entre matrices de distancias. Los resultados indican que las relaciones biológicas entre subregiones no cambian cuando son obtenidas con cráneos deformados artificialmente o con cráneos sin deformación. Además, se comprueba la

- En el campo de aplicación de la antropología biológica trabajamos constantemente con distintos tipos de números. Por ejemplo en osteometría se utilizan métodos estandarizados de medición. La mayoría de estas medidas refieren a distancias entre puntos establecidos en las diferentes piezas óseas. Tomando el fémur se releva la longitud máxima, la longitud bicondilar, anchura epicondilar, entre otras medidas de utilidad para describir la morfología y realizar distintos tipos de estudios. Por convenciones establecidas internacionalmente estas medidas deben ser registradas con un instrumental específico y con una unidad de medida establecida. Siguiendo con el ejemplo del fémur (Desántolo et al. 2013), se utilizan distintas medidas e índices para aproximar la identificación de un individuo en un caso de reclamo de tierras ancestrales.

A continuación, un extracto de "Folia Histórica del Nordeste". Nro. 21, pág. 163

Aportes bioantropológicos para la identificación

La estimación de la morfología craneana se realizó a través del relevamiento morfométrico pormenorizado del cráneo (Buikstra y Ubelaker, 1994). El cálculo de índices indicadores de forma permiten caracterizar al individuo como sigue: cabeza de capacidad media (1373,55 según fórmula de Lee y Pearson), alargada en sentido anteroposterior (Índice Craneano Horizontal = 70.33), alta en relación a la longitud (Índice Craneano Vértico-Longitudinal = 75.27) y alta respecto a la anchura (Índice Craneano Vértico-Transversal = 107.03), de frente ancha (Índice Fronto-Parietal = 85.16) con crestas temporales intermedias (Índice Frontal Transversal = 87.15), con región maxilar no saliente (Índice Gnático = 102.04), cara baja y ancha (Índice Facial Superior = 44.93), nariz alta y estrecha (Índice Nasal = 40.71), órbitas medias (Índice Orbitario = 83.33), arcada alveolar superior ancho (Índice Arcada Alveolar = 116.00) y paladar ancho y corto (Índice Palatino = 97.56).

Estimación de la estatura

La relación entre la longitud de los huesos largos y la estatura del individuo, a todas las edades, ha servido a los osteólogos para reconstruirla a partir de valores métricos obtenidos en diferentes elementos óseos post craneanos (White y Folkens, 2005). La estimación de la estatura se realizó a partir del fémur izquierdo utilizando la fórmula de Trotter (1970).

Trotter, 1970

Masculino 2.38 x (fémur) + 61.41= estatura +/- 3.27

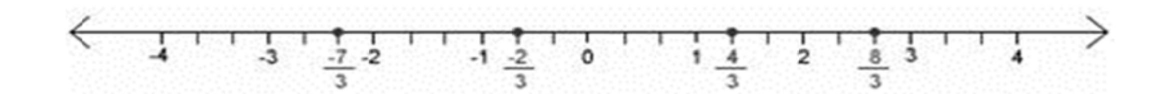
2.38 x 43.7 + 61.41= **165.416** (162.14 - 168.68)

Representación

La representación de los números reales se hace sobre una recta denominada **recta real.** Se considera un punto de origen al que se le asigna el **0,** se elige cierta longitud como unidad, y se ubican los números deseados.

---

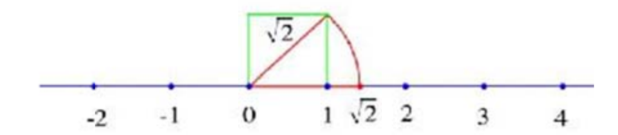
existencia de dos conglomerados biológicos, uno integrado por Valliserrana y Selvas Occidentales y otro constituido por Puna y Quebrada de Humahuaca. Por último, se demuestra que este modelo es globalmente consistente con el obtenido a partir de caracteres discretos del cráneo.



Observemos que los reales negativos aparecen a la izquierda del cero.

La representación de los números irracionales no es tan directa como la de los números racionales. ¿Por qué?

Por ejemplo, algunos números irracionales tal como $\sqrt{2}$ se pueden representar de esta manera:



Se puede demostrar que existe una relación biunívoca entre la recta real y los números reales, es decir que a cada punto de la recta real le corresponde un único número real, y a cada número real un único punto de la recta.

Propiedades

El conjunto de los números reales satisface la siguiente lista de axiomas:

- Si $a, b \in R$, entonces $a + b \in R$ (Cerradura en la suma)
- Si $a, b \in R$, entonces $a + b = b + a$ (Conmutatividad en la suma)
- Si $a, b, c \in R$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociatividad en la suma)
- Existe 0 de manera que $a + 0 = a$ para todo $a \in R$ (Neutro aditivo)
- Para cada $a \in R$ existe un elemento $-a \in R$ tal que $-a + a = 0$ (Inverso aditivo)
- Si $a, b \in R$, entonces $a.b \in R$ (Cerradura en la multiplicación)
- Si $a, b \in R$, entonces $a \cdot b = b \cdot a$ (Conmutatividad en la multiplicación)
- Si $a, b, c \in R$, entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Asociatividad en la multiplicación)
- Existe $1 \in R$ de manera que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para cualquier $a \in R$ (Neutro multiplicativo)
- Para cada $a \neq 0,\ a \in R$, existe un número $b \in R$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$ y escribimos $b = \frac{1}{a}$ o $b = a^{-1}$ de manera que $a \cdot a^{-1} = 1$ (Inverso multiplicativo)

Ejemplo: Sea $a = 3$, existe el número $b = \frac{1}{3}$ de manera que $a \cdot b = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Notar que la expresión $\frac{1}{0}$ o 0^{-1} **no está definida.** En otras palabras, **no podemos dividir por cero** y no atribuimos ningún significado a los símbolos mencionados anteriormente.

- Si $a \in R$ entonces el producto $a \cdot 0 = 0$ y está definido.

El producto de cualquier número por 0 es 0. Por otra parte, si $b \in R$, b ≠ 0, entonces $\frac{0}{b}$ está definido y es igual a 0.

- Si $a, b, c \in R$, entonces $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ (Propiedad distributiva de la multiplicación en la suma)
- Si $a, b \in R$, entonces se cumple sólo una de estas: (Tricotomía)
  - $a > b$
  - $a < b$
  - $a = b$
- Si $a, b, c \in R$, $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (Transitividad)
- Si $a, b, c \in R$ y $a < b$, entonces $a + c < b + c$ (Monotonía en la suma)
- Si $a, b, c \in R$, $a < b$
  - $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonía en la multiplicación)
  - $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$ (Monotonía en la multiplicación)

Un ejemplo de estos dos últimos axiomas es:

Si tenemos la desigualdad: $1 < 3$. Como $2 > 0$, tenemos también $2 \cdot 1 < 2 \cdot 3$. Pero -2 es negativo, y si multiplicamos ambos miembros por -2 obtenemos $-2 > -6$.

En la representación de los números reales sobre la recta, -2 se encuentra a la derecha de -6. Esto nos muestra que -2 es mayor que -6.

Daremos también un ejemplo que nos muestre cómo determinar números que satisfagan ciertas desigualdades. Para esto necesitamos alguna terminología.

Sean a y b dos números y supongamos que $a < b$.

- La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b, y se denota (a, b).
- La colección de números x tales que $a \leq x \leq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b, y se denota $[a, b]$. Un punto sólo se llamará también intervalo cerrado.

En ambos casos, los números a y b se denominan **extremos** de los intervalos. Algunas veces deseamos incluir solamente uno de ellos en el intervalo y entonces definimos:

- La colección de los números x tales que $a \le x < b$ como un intervalo **semicerrado**, lo mismo para los números x tales que $a < x \le b$.

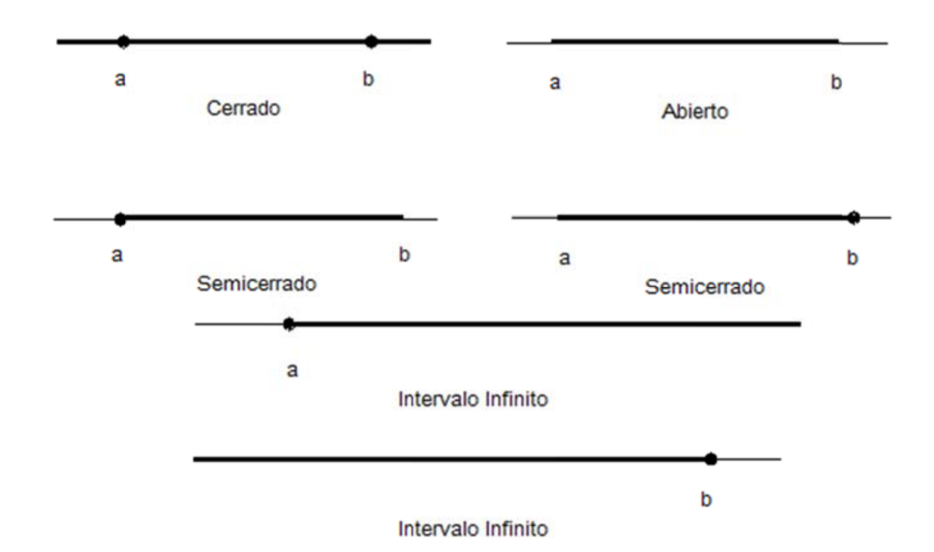
  Finalmente, si a es un número:

- La colección de los números $x > a$, $x \ge a$, $x < a$ ó $x \le a$ se denomina **intervalo infinito.**

  En resumen

Notación de conjunto	Notación de intervalo	Gráfica	Tipo de intervalo
$\{x / a < x < b\}$	(a,b)	(----------|----------) a 0 b	Intervalo abierto
$\{x / a \le x \le b\}$	$[a,b]$	[----------|----------] a 0 b	Intervalo cerrado
$\{x / a \le x < b\}$	$[a,b)$	[----------|----------) a 0 b	Intervalo cerrado en a y abierto en b
$\{x / a < x \le b\}$	$(a,b]$	(----------|----------] a 0 b	Intervalo abierto en a y cerrado en b
$\{x / x \ge b\}$	$[b,+\infty)$	[-------------------- b +∞	Intervalo infinito
$\{x / x \le b\}$	$(-\infty,b]$	--------------------] -∞ b	Intervalo infinito
$\{x / x > b\}$	$(b,+\infty)$	(-------------------- b +∞	Intervalo infinito
$\{x / x < b\}$	$(-\infty,b)$	--------------------) -∞ b	Intervalo infinito

Mostramos algunos dibujos de intervalos



Un ejemplo muy común de intervalos en antropología puede ser el de los intervalos en los métodos de datación. Cada método tiene su respectivo rango temporal de utilidad. El carbono

14 puede medir hasta 60000 años ^{14}C AP mientras que la termoluminiscencia puede medir hasta 200000 años y el Potasio-Argón puede llegar a millones de años.

Actividad 1

1.1 Escribir el conjunto que satisfacen las siguientes condiciones y representar en la recta:

1.1.1 Números reales mayores que -2 y menores o iguales a 5

1.1.2 Números reales menores que -2 o mayores o iguales a 5.

1.1.3 Números reales mayores que 3 y menores que 1.

1.1.4 Números reales mayores que 3 o menores que 1.

1.2 Escribir la desigualdad que representa el intervalo:

1.2.1 $(-\infty,-1)$

1.2.2 $[-6,\infty)$

1.2.3 $(-\infty,3]$

1.2.4 $(2,6]$

1.2.5 $(10,\infty)$

1.2.6 $[-1,4]$

Inecuaciones

Se llaman inecuaciones lineales a aquellas desigualdades que contienen una variable. Una inecuación se resuelve hallando el conjunto de valores que verifica la desigualdad.

Algunos ejemplos son:

- $-3x > 2$
  $-3x:(-3) < 2:(-3)$
  $x < -\frac{2}{3}$
  $s = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

- $-\frac{1}{4}x \geq -1$
  $-\frac{1}{4}x(-4) \leq -1(-4)$
  $x \leq 4$
  $s = (-\infty, 4]$

- $3x - \frac{8}{3} < 4 - x$
  $3x + x < 4 + \frac{8}{3}$
  $4x < \frac{20}{3}$
  $x < \frac{20}{3} : 4$
  $x < \frac{5}{3}$
  $s = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número nos indica la **distancia** que existe entre dicho número y el 0.

Se define al valor absoluto o módulo de un número a como: $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a > 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Representaremos el valor absoluto de un número colocándolo entre dos barras verticales. Así, el valor absoluto de un número a se simboliza como $|a|$.

Observemos que cuando a es negativo, $-a$ es positivo. Así pues, el valor absoluto de un número es siempre un número positivo o cero.

Por ejemplo

- $|3| = 3$ ya que $3 > 0$
- $|-5| = -(-5)$ ya que $-5 < 0$

Para determinar los números que satisfacen la condición $|x+1| = 2$ aplicamos la definición:

$$x+1=2 \qquad -\left(x+1\right)=2$$
$$x=2-1 \quad \text{o} \quad x+1=-2$$
$$x=1 \qquad x=-2-1$$
$$x=-3$$

Solución = $\{-3;1\}$

Hallemos los intervalos de números que satisfacen la desigualdad: $|x+1| > 2$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades:

$$x+1>2 \qquad -\left(x+1\right)>2$$
$$x>2-1 \quad \text{o} \quad x+1<-2$$
$$x>1 \qquad x<-2-1$$
$$x<-3$$

Hay dos intervalos infinitos que verifican la desigualdad: $x > 1$ y $x < -3$.

En notación de intervalo: $S = \left(-\infty;-3\right) \cup \left(1;+\infty\right)$

Actividad 2

2.1 Resolver las siguientes inecuaciones, escribir la solución en notación de intervalo y representarla en la recta real.

2.1.1 A= $\{x/|x|<3\}$

2.1.2 B= $\{x/|x+1|<6\}$

2.1.3 C= $\{x/|3x-2|<5\}$

2.1.4 D= $\{x/|x-5|>2\}$

2.1.5 E= $\{x/|x-1|<4\}$

2.1.6 F= $\{x/|2x-1|>3\}$

Sucesiones

Diremos, provisoriamente, que una sucesión es un conjunto ordenado de números, de modo que alguno de ellos se identifica como el primero y así siguen uno a continuación del otro. En el Capítulo 2 daremos la definición formal de este concepto.

El conjunto de los números naturales es una sucesión de infinitos elementos.

$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; ...\}$

A cada uno de los elementos de una sucesión se los denomina **términos.**

Otro ejemplo es:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{2}; & 1; & \frac{3}{2}; & 2; & \frac{5}{2}; & 3; & ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \end{array}$$

En general a dichos términos se los escribe como: $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

Algunas sucesiones tienen cierta regularidad de manera que se puede encontrar el término general $\boldsymbol{a_n}$ también llamado término enésimo. Dicho término tendrá una expresión que nos permitirá calcular el valor de cualquier término conociendo el lugar que ocupa.

En la sucesión $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; ...$ el **término general** es $\boldsymbol{a_n} = \frac{n}{2}$

Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{1}{n}$, entonces la sucesión será:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6}; ...; \frac{1}{n}$$

Sucesión o Progresión Aritmética

Es aquella en la cual cada término de la misma se obtiene sumando al anterior un número constante $\boldsymbol{r}$ llamado **razón aritmética.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 + 0r \\ a_2 = a_1 + 1r \\ a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r = a_1 + 3r \\ ... \\ a_n = a_{n-1} + r = a_1 + \underbrace{r + r + ... + r}_{n\text{-}1\ veces} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{El término general } a_n \text{ es}} \boxed{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

Por ejemplo $3, \xrightarrow{3+6} 9, \xrightarrow{9+6} 15, \xrightarrow{15+6} 21, \xrightarrow{21+6} 27, ... \rightarrow$ Sucesión aritmética con $r = 6$

La diferencia entre dos términos consecutivos es lo que define la razón:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r \qquad \text{con } n \in N - \{1\}$$

Sucesión o Progresión Geométrica

Es aquella en la cual cada término se obtiene multiplicando al anterior por un número constante r llamado **razón geométrica.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 \cdot r^0 \\ a_2 = a_1 \cdot r^1 \\ a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ \ldots \\ a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n\text{-}1\ veces} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{El término general } a_n \text{ es}} \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Por ejemplo $5, \xrightarrow{5\cdot(-2)} -10, \xrightarrow{-10\cdot(-2)} 20, \xrightarrow{20\cdot(-2)} -40, \xrightarrow{-40\cdot(-2)} 80, \ldots$ $\rightarrow$ Sucesión geométrica con $r = -2$

Para que una razón sea geométrica debe verificarse que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \text{ con } n \in N - \{1\}$$

Actividad 3

3.1 Un equipo de arqueólogos está relevando un conjunto de terrazas de cultivo en la ladera de un cerro. La primera terraza está contenida por un pircado[2] de 15 metros de largo y abarca 30m^2 de superficie disponible para cultivo. En la segunda terraza se visualiza un pircado de 20 metros y cuenta con una superficie de 60m^2 para cultivo. La tercera terraza cuenta con un pircado de 25 metros y dispone una superficie de 120m^2 para cultivo. Siguiendo cuesta abajo se pueden visualizar 3 terrazas altamente afectadas por un desmoronamiento.

3.1.1. En base a los datos determinar si están en progresión aritmética o geométrica. Explicar.

3.1.2. Para poder poner a resguardo y delimitar el área de excavación el equipo necesita conocer cuál es la medida del pircado de la última terraza.

3.1.3. Se necesita alambrar todos los pircados para contenerlos y evitar mayores desmoronamientos. Calcular los metros de alambre que se utilizarán.

3.1.4. Para proteger el área se necesita cubrir todas las superficies de las terrazas con rollos de polietileno. Calcular cuántos m^2 de polietileno se utilizarán.

3.1.5. Para obtener una muestra de sedimento se necesita excavar el 10% de la superficie de la cuarta terraza. Calcular cuánta superficie hace falta excavar.

---

[2] Pircar: cerrar un lugar con muro de piedra en seco.

3.2 Se ha estudiado la variación morfológica craneana de la especie sudamericana *Caiman yacare* a lo largo de la ontogenia. A partir de este estudio se determinaron dos regiones particulares a analizar, la orbitaria y la del hocico. Se seleccionaron las variables: largo del hocico y largo de la órbita ocular para determinar si hay un cambio de forma del cráneo a lo largo de la vida del animal. Si el aumento de dichas variables es lineal (modelo isométrico), entonces sólo hay un aumento de tamaño de esas regiones del cráneo a lo largo de la ontogenia; por el contrario, si el crecimiento es geométrico (modelo alométrico), entonces hay un cambio ontogenético de forma.

Se utilizó una muestra de 14 ejemplares de caimanes en tres distintos estadios ontogenéticos (juvenil, subadulto y adulto). De dicho análisis se obtuvieron los siguientes promedios para cada variable en cada estadio:

	Largo del Hocico (mts)	Largo de la órbita (mts)
1° estadio	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
2° estadio	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
3° estadio	$\frac{45}{64}$	$\frac{1}{10}$

Aclaración: Se han aproximado algunos valores reales para que la complejidad del ejercicio resulte de los modelos a aplicar, y no de los cálculos que permiten arribar a las soluciones.

Mediante el uso de progresiones aritméticas y geométricas, determinar a qué modelo, de los mencionados anteriormente, se ajusta cada variable. En cada caso, escribir la expresión que relaciona los distintos estadios.

3.3 En el depósito del Museo se guardaron las urnas funerarias de una colección en estantes. En la base hay 50 de ellas, en la siguiente fila hay 49, en la siguiente 48, y así sucesivamente hasta la última fila de 20 urnas. ¿Cuántos estantes se ocuparon?

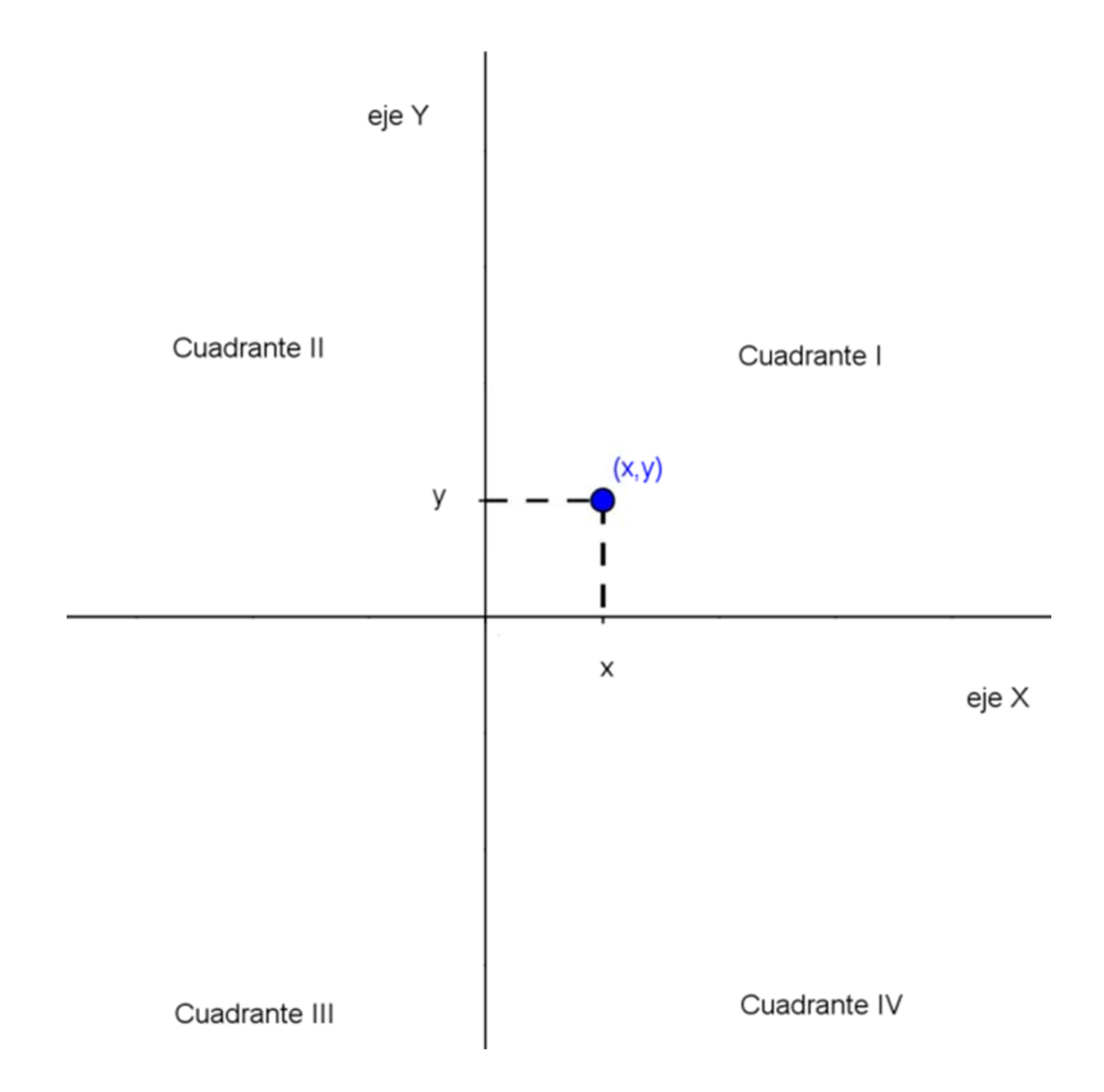
Sistema de coordenadas Cartesianas

El sistema de representación más utilizado en matemática es el denominado **sistema de coordenadas rectangular** o **plano cartesiano**, en honor al matemático francés René Descartes.

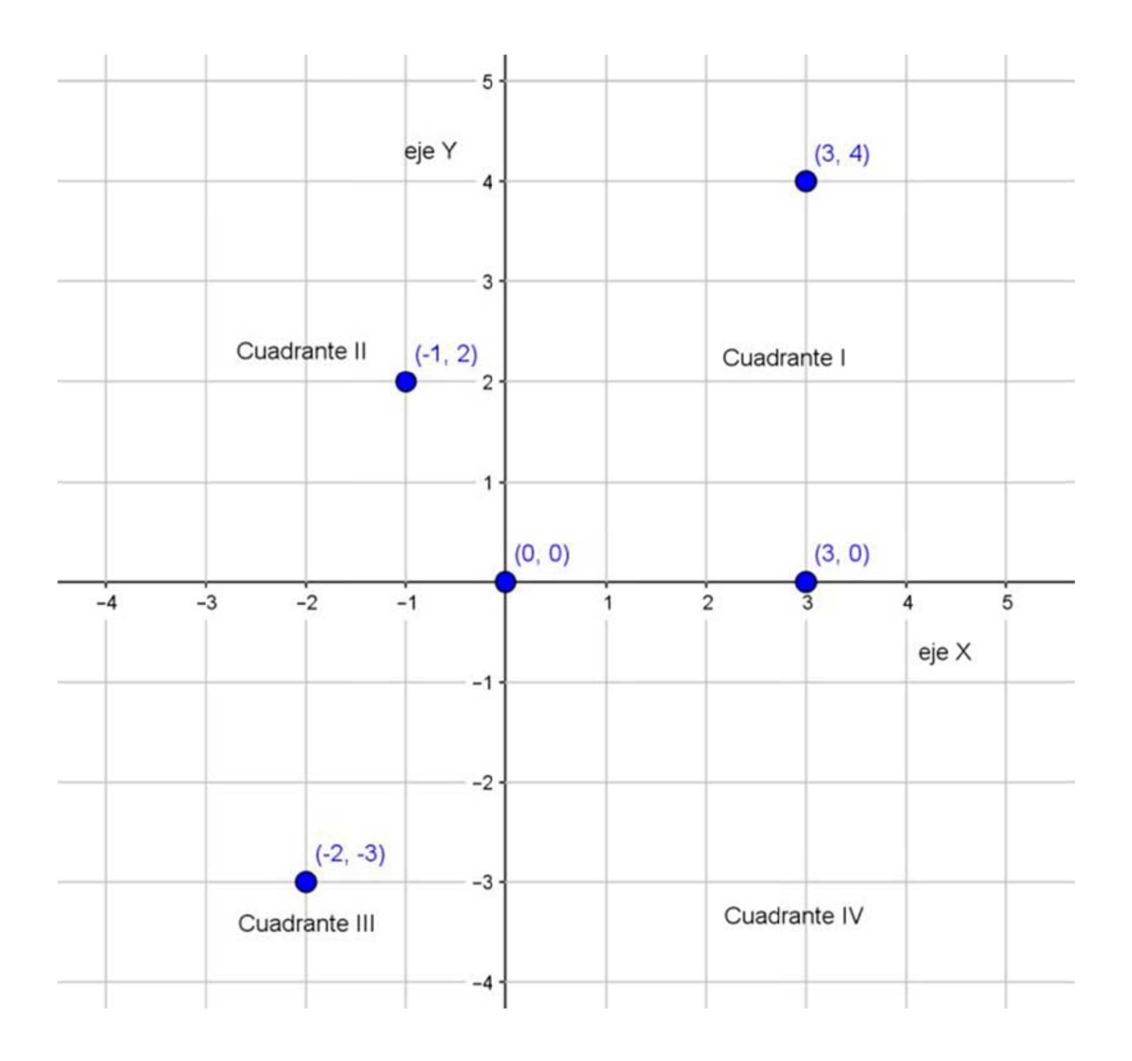
Descartes, cuyo punto de partida era la desconfianza de toda fuente de conocimiento que no fuera la razón, es la racionalización del espacio. Descartes no inventa el sistema de coordenadas, pero es el primero que comprende que la sustitución de un punto del plano por

un par de números constituye el caso más simple de interpretación en términos abstractos, de un dato de la intuición del espacio.

Dicho plano cartesiano está compuesto por dos rectas reales que se cortan formando ángulos rectos. Los pares ordenados de la forma (x, y) de números reales son los que identifican cada punto de dicho plano. Por convención se adopta que la primera coordenada del par, el número x, es un valor de la recta horizontal llamada "Eje x", y la segunda componente es un valor de la recta vertical llamada "Eje *y*". Su punto de intersección es el **origen**. Los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**.



"[…] El número x representa la distancia dirigida desde el eje y hasta el punto, y el número y, la distancia dirigida desde el eje x hasta el punto. Para el punto (x, y), la primera componente representa la coordenada x o la **abscisa** y la segunda componente, la coordenada y o la **ordenada**. Por ejemplo, la siguiente figura muestra las posiciones de los puntos $(-1,2);(3,4);(0,0);(3,0)$ y $(-2,-3)$ en el plano cartesiano." (Larson, 2001. Pág. 733)



Se adopta desde el origen de coordenadas hacia la derecha en el eje x y hacia arriba en el eje y el sentido positivo. A la izquierda del origen sobre el eje x y hacia abajo del origen sobre el eje y el sentido negativo.

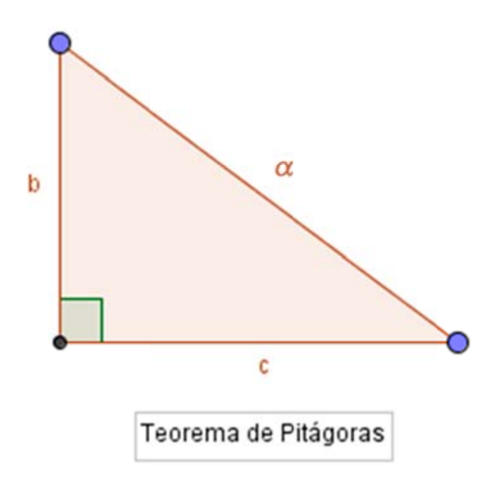
Observemos que la forma de representar un par ordenado (a,b) es análoga a la forma que utilizamos previamente para denotar un intervalo abierto. Sin embargo, esto no debería ocasionar inconvenientes dado que los contextos en los que se presenten uno u otro son bien diferenciados.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos cualesquiera del plano cartesiano se puede hallar a partir de la relación pitagórica.

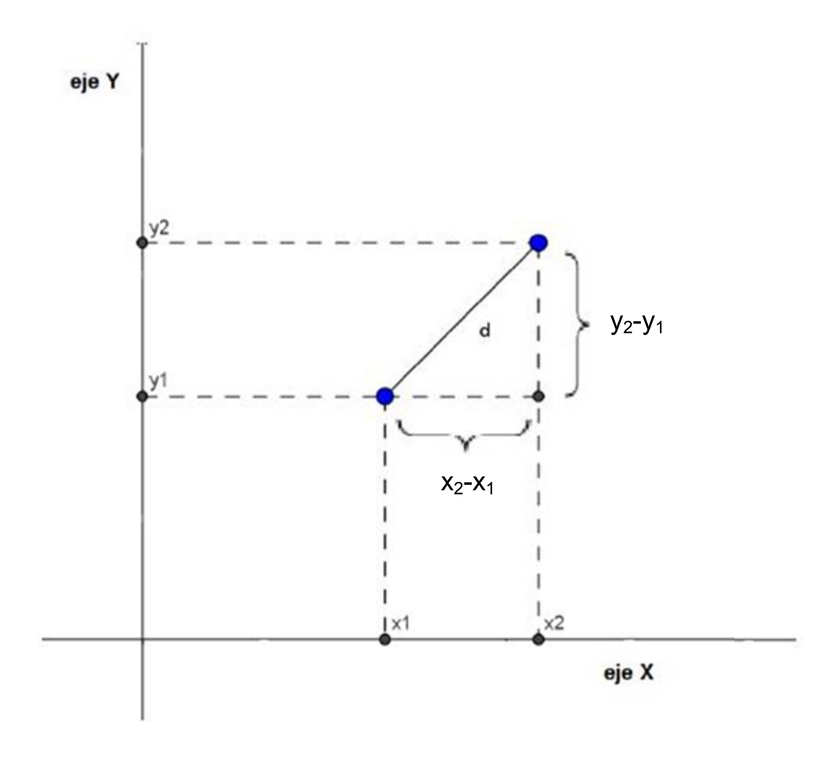
Recordemos el teorema de Pitágoras:

Sean **b** y **c** los catetos y ***a*** la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Estos están relacionados por la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$. Recíprocamente, si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.



Para determinar la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano, se construye con dichos puntos un triángulo rectángulo de manera que la longitud de un cateto del triángulo es $|y_2 - y_1|$, y la otra es $|x_2 - x_1|$. Del teorema de Pitágoras, se sigue que:

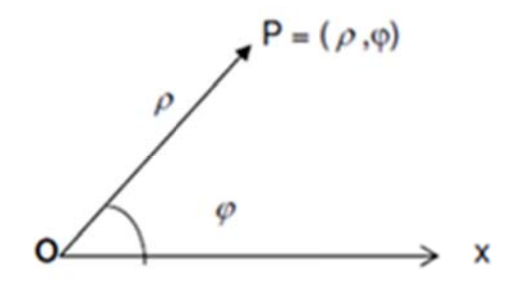
$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$



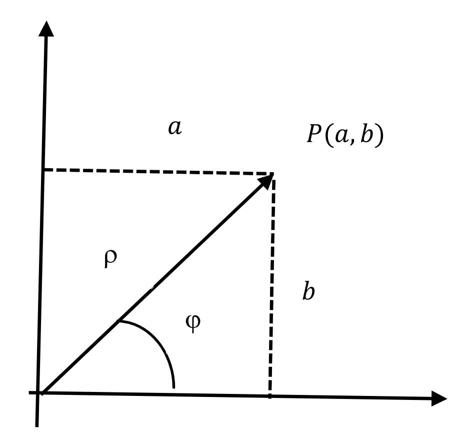
Sistemas de coordenadas Polares

Si bien el sistema de coordenadas cartesiana permite modelizar y dar respuesta a muchas situaciones, no es el único sistema utilizado en matemática.

Una forma distinta de representar puntos del plano es utilizando un sistema de coordenadas constituido por un **polo O** y un **eje polar** x , al cual se lo llama **sistema polar**. En este sistema, la posición de un punto queda determinada por la distancia que surge de unir dicho punto P con el polo O y el ángulo que forman la dirección positiva del eje polar con el segmento trazado desde P hasta O. La longitud del segmento $\overline{OP}$ recibe el nombre de radio vector ρ y el ángulo recibe el nombre de argumento φ.



Equivalencia entre los sistemas Cartesiano y Polar



Por las propias características con las que quedan definidos ambos sistemas, se puede determinar una equivalencia entre ellos. Dibujando los sistemas superpuestos, de forma tal que el origen coincida con el polo y el eje x con el eje polar, se puede demostrar mediante las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras la validez de las siguientes fórmulas de transformación:

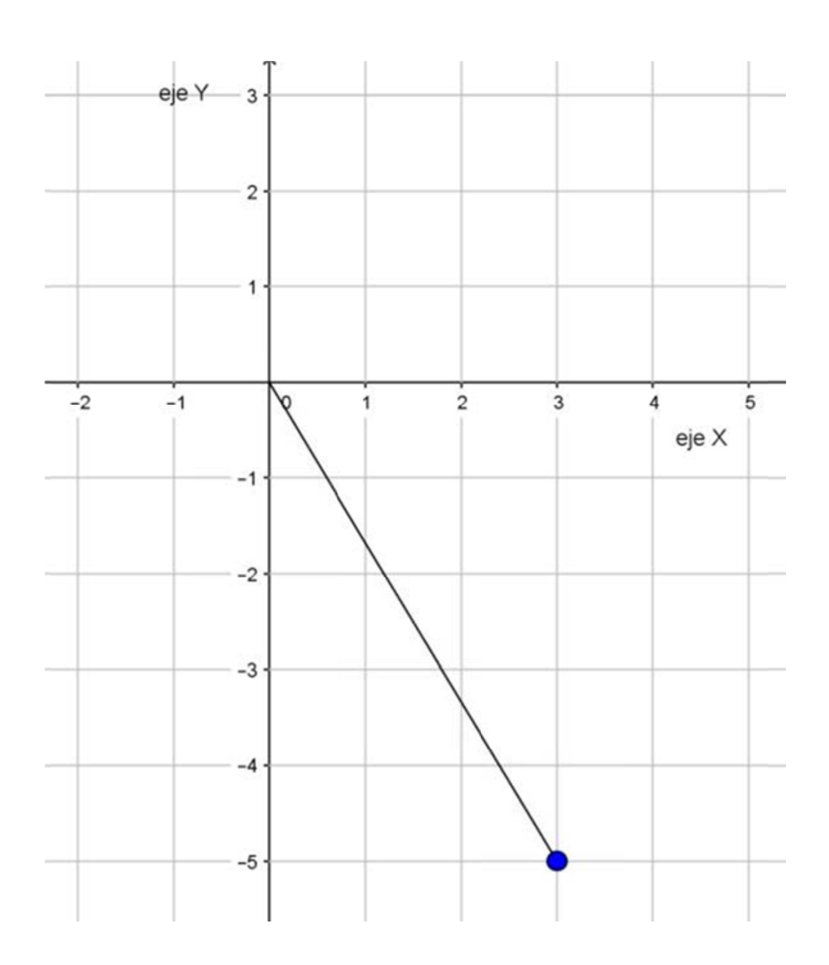
- Si se conocen las coordenadas cartesianas a y b , $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, siendo su valor la longitud del segmento $\overline{OP}$.

El ángulo φ, que forma el semieje positivo de x con la dirección del segmento $\overline{OP}$ se obtiene de la relación trigonométrica $tg\varphi = \frac{b}{a}$ siendo $\varphi = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

- Si se conocen las coordenadas polares (ρ, φ), estableciendo las correspondientes relaciones trigonométricas $\cos\varphi = \dfrac{a}{\rho}$ y $\text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\rho}$, obtenemos $a = \rho \cdot \cos\varphi$ y $b = \rho \cdot \text{sen}\,\varphi$

Hacemos notar que, desde lo estrictamente matemático tienen la misma posición sobre el plano todos los pares ordenados de forma $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, siendo k un número entero, pero aquí se ha tomado una única solución considerando un solo período de 0 a 2π.

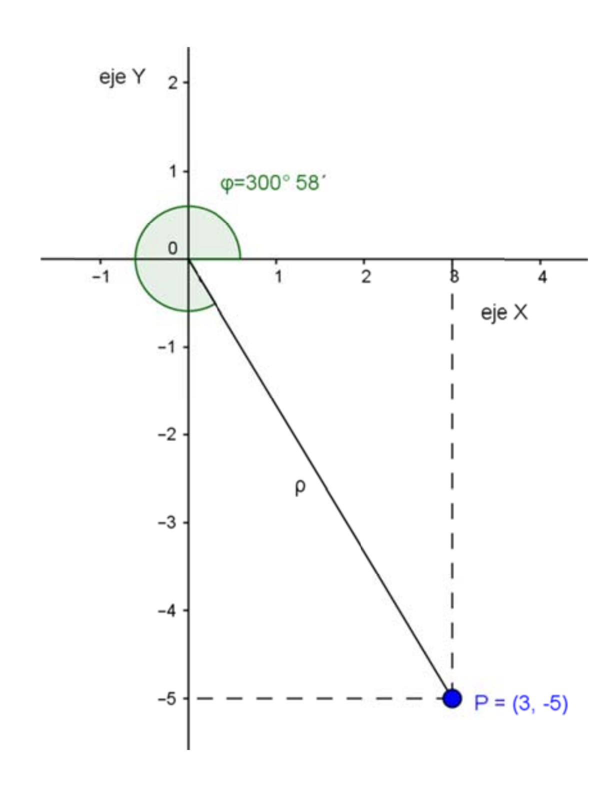
Hallaremos las coordenadas polares del punto P, si sus coordenadas cartesianas son $a = 3;\ b = -5$



$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$\varphi = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) = arctg\left(-\dfrac{5}{3}\right)$. Por ser a positivo y b negativo, el punto estará ubicado en el cuarto cuadrante, resultando $\varphi = 300°58'$.

Entonces es punto (3;-5) en coordenadas cartesianas es equivalente a $(\sqrt{34}; 300^0 58')$ en coordenadas polares.

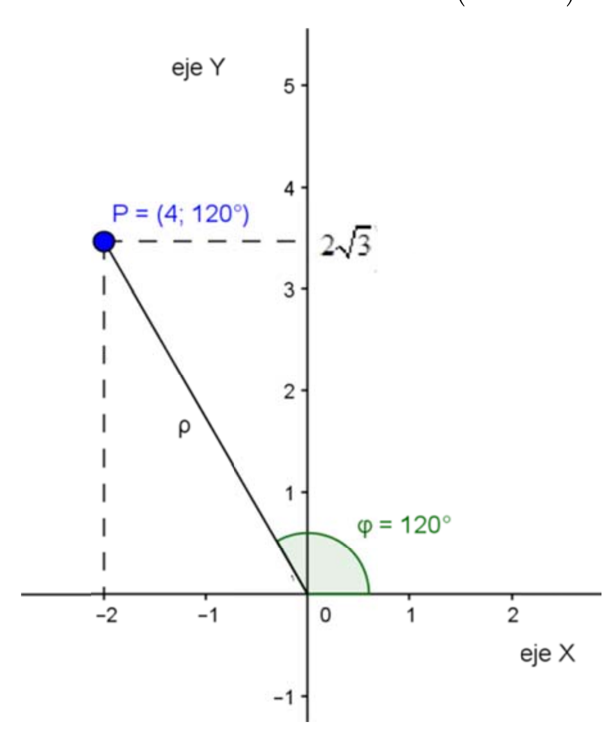


Hallaremos las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas polares son $(4,120°)$

$$a = \rho \cdot \cos\varphi = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$b = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi = 4\operatorname{sen}120° = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

en consecuencia las coordenadas cartesianas de P son $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.



Actividad 4

4.1 Dados los siguientes puntos del plano expresados en coordenadas cartesianas:

$$A(3,2); B(2,5); C(5,0); D(10,0); E(6,-8); F(-2,-3); G(-4,4)$$

4.1.1. Representarlos.

4.1.2. Calcular la distancia entre AyC; CyD; EyG.

4.1.3. Transformarlos a coordenadas polares.

4.2 Dados los siguientes puntos del plano expresados en coordenadas polares:

$$H(8,60°); I(10,120°); J(10,180°); K(6,315°); L(\sqrt{2},45°)$$

Transformarlos a coordenadas cartesianas.

Es muy común en una excavación arqueológica tener que relevar la morfología del sitio, estructuras y la distribución de los artefactos dentro del mismo. Esto se realiza utilizando técnicas topográficas con instrumental específico. La mayoría de estos instrumentos utilizan el sistema de coordenadas polares para determinar los puntos que van a conformar el mapa. Como vimos, las coordenadas polares se obtienen midiendo una distancia y un ángulo. La primera se puede medir con pasos o cinta y la segunda con brújula o teodolito, entre otros.

4.3 La siguiente tabla forma parte de una libreta de campo que tiene los resultados del relevamiento de la distribución de los restos arqueológicos recuperados. Con esta información, confeccionar un mapa de distribución en coordenadas cartesianas y describir lo que puedes inferir.

Punto	Azimut	Distancia	Observaciones
1	40	4	Carbón
2	55	6	Cerámica
3	43	9	Óseo faunístico
4	120	5	Roca granítica
5	135	6	Roca granítica
6	140	7	Roca granítica
7	125	8	Roca granítica
8	230	3	Lasca de obsidiana
9	245	2	Óseo faunístico
10	330	12	Enterratorio humano

Ecuaciones e inecuaciones en el plano

Una ecuación lineal en el plano queda representada por una recta. Una desigualdad lineal en el plano queda representada por una región.

Una solución de una desigualdad con dos variables es un par ordenado de números que verifica la desigualdad.

Para mostrar que un par ordenado (x, y) es una solución de una desigualdad lineal sustituimos en dicha desigualdad el par ordenado.

Para determinar si $(-3,2)$ es una solución de $5x-4y \leq 13$ se reemplaza x por -3 e y por 2.

$$\begin{aligned}
&5x-4y \leq 13 \\
&5(-3)-4(2) \leq 13 \\
&-15-8 \leq 13 \\
&-23 \leq 13
\end{aligned}$$

Como -23 es menor que 13, el par ordenado $(-3,2)$ cumple la desigualdad y es una solución.

Las gráficas de desigualdades lineales de dos variables se pueden utilizar para resolver muchos problemas, en especial aquéllos relacionados con la optimización de cantidades.

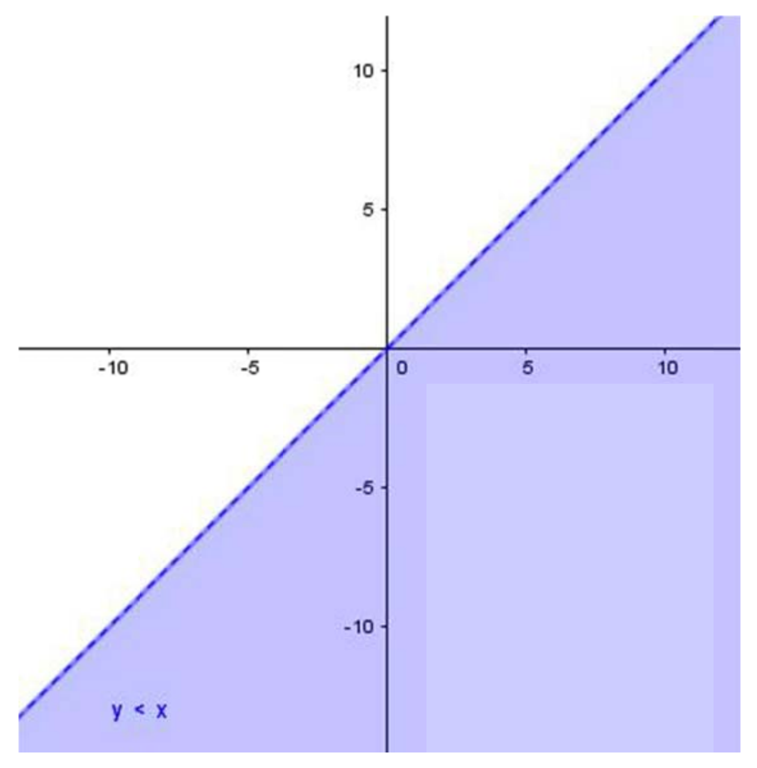
Para representar gráficamente una desigualdad lineal, primero trazamos la gráfica de la ecuación lineal correspondiente.

Por ejemplo, representaremos gráficamente $y < x$.

En primer lugar, trazamos la gráfica de la ecuación $y = x$. Esta recta señala la frontera entre los puntos que satisfacen la desigualdad y los que no la satisfacen. Trazamos la recta punteada ya que los puntos sobre ella no se encuentran en el conjunto solución de $y < x$

Para cualquier punto por encima de la recta $y > x$. Para cualquier punto por debajo de la recta $y < x$. Por consiguiente, la gráfica es el semiplano bajo la recta fronteriza $y = x$. Esto lo mostramos sombreando el semiplano inferior.

La gráfica de cualquier desigualdad lineal de dos variables es un semiplano o un semiplano junto con su frontera, la recta.

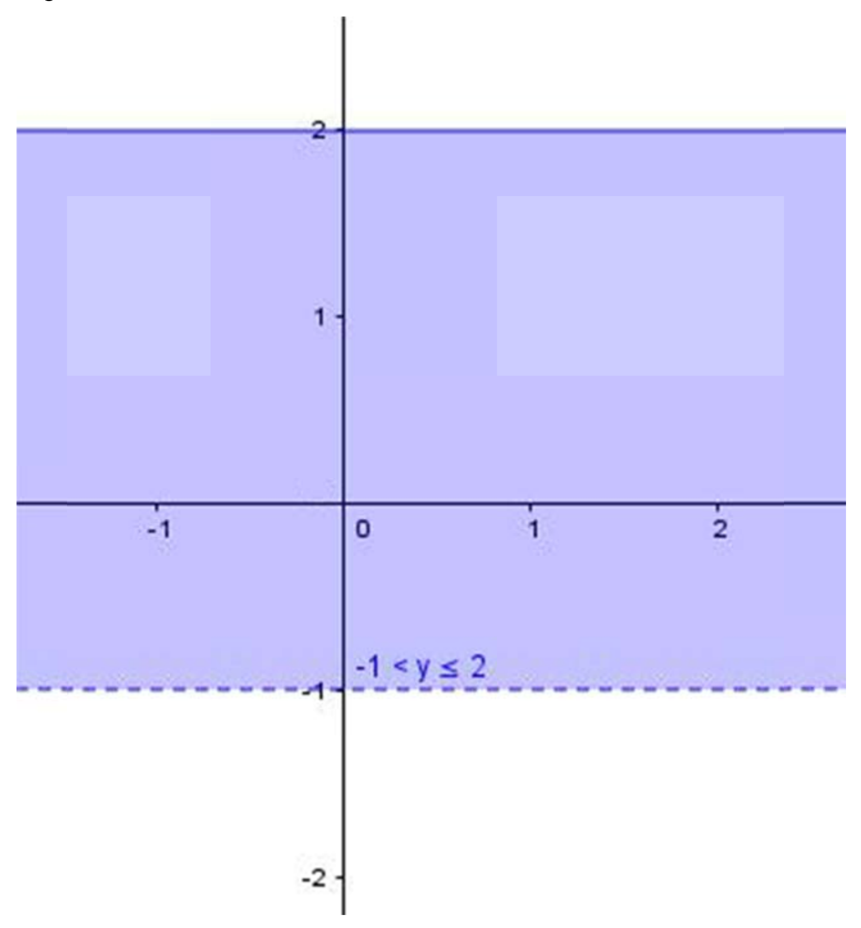


Representaremos gráficamente $-1 < y \leq 2$.

Se trata de una conjunción de dos desigualdades.

$$y > -1 \ \wedge \ y \leq 2$$

Como nuestra desigualdad es una conjunción, su gráfica es la intersección de las gráficas de las dos desigualdades.



Actividad 5

5.1 Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Graficar.

5.1.1. $y < 2 - \frac{1}{2}x$

5.1.2. $y \leq 2x - 4$

5.2 Una empresa fabrica dos productos distintos, A y B. Cada unidad del artículo A producida requiere dos horas de trabajo en una taladradora, y cada unidad del artículo B requiere cinco horas de trabajo en la taladradora. La empresa tiene un máximo de 40 horas de trabajo para la taladradora por semana. Si la limitación de la producción es el uso de la taladradora, graficar la relación que muestra las combinaciones de los productos que la empresa puede producir semanalmente.

Bibliografía

Berio, A. y otros. (2011). Matemática 2 Activa. (1ª ed). Argentina. Puerto de Palos

Desántolo B., Lamenza G., Balbarrey G., Ramallo V., De Feo C., Calandra H. y S. Salceda. 2013. Territorialidad y laudo forense. El caso Misión Esteros (Formosa, Argentina). Folia Histórica del Nordeste 21:155-167.

Lang, S. (1986). Cálculo I. México. Fondo Educativo Interamericano.

Larson, R. (2001). Cálculo y geometría analítica. (6ª ed). México. Programas Educativos S.A.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Smith, S. (1998). Algebra, trigonometría y geometría analítica. Naucalpan de Juárez: Addison Wesley.

Varela, H.; Paschetta, C. y Cocilovo, J. (2004). Análisis de las relaciones biológicas entre poblaciones del N.O. argentino por medio de caracteres métricos. En *Relaciones de la Sociedad Argentina de Antropología XXIX,* Buenos Aires. Recuperado de http://www.saantropologia.com.ar/wp-ontent/uploads/2015/01/Relaciones%2029/15%20Varela.pdf

Webgrafía

https://pshychik.wordpress.com/2012/07/02/presentacion-de-los-numeros-reales/ Accedido 10/10/2016

http://disparatesmatematicos.blogspot.com.ar/2014_07_01_archive.html Accedido 06/10/2016

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real Accedido 10/10/2016

Rengifo H, U. (2015) Taller 1. Números Racionales. Colegio Berchmans. Cali

CAPÍTULO 2
Funciones

Romina Herrera y Anyelen Di Paolantonio

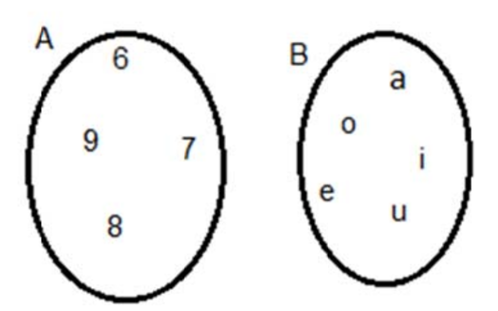
Conjuntos

Un conjunto es una colección de elementos que comparten alguna característica común. Por ejemplo:

- Los alumnos de Elementos de Matemática forman un conjunto. La característica común es ser alumno de la materia, no importa a qué carrera pertenecen, si son ingresantes o si son recursantes.
- Los días de la semana; las letras del abecedario; los números naturales; los números naturales mayores que 5 y menores a 10; las vocales; forman cada uno un conjunto.

A los conjuntos se los suele nombrar con una letra mayúscula y los podemos representar de distintas formas, por ejemplo:

Diagrama de Venn: Consiste en encerrar los elementos que forman parte del conjunto con una línea y se indica el nombre del mismo. Tomando los dos últimos ejemplos mencionados quedarían:



Se los puede nombrar:

- **Por extensión**: consiste en detallar todos los elementos que forman parte del conjunto.

A={6;7;8;9}   B={a;e;i;o;u}

- **Por comprensión**: consiste en describir la característica que define al conjunto.

$$A = \{x \in N / 5 < x < 10\}$$

$$B = \{\, x\ es\ alguna\ vocal\}$$

Un conjunto puede escribirse como una lista de elementos, pero cambiar el orden de los elementos no define un conjunto nuevo. Por ejemplo:

S = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes} = {Martes, Viernes, Jueves, Lunes, Miércoles}

C = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Violeta} = {Amarillo, Naranja, Rojo, Verde, Violeta, Azul}

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. El conjunto de los números naturales es infinito, pero el conjunto de los días de la semana es finito, tiene siete elementos.

Los conjuntos pueden combinarse mediante operaciones, de manera similar a las operaciones con números.

Los conjuntos han sido el concepto fundamental de la Matemática Moderna. Mediante ellos pueden definirse objetos matemáticos, como los números y las funciones, entre otros. Su estudio detallado requiere la introducción de axiomas y conduce a la teoría de conjuntos que no abordaremos en este libro.

Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B; llamamos producto cartesiano de A y B (en ese orden), denotado AxB, al conjunto cuyos elementos son todos los **pares ordenados** que se pueden formar, de modo tal que el primer elemento pertenezca a A y el segundo a B. Esta definición se simboliza:

$$A \text{x} B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Veamos un ejemplo:

Tenemos los conjuntos $A = \{6; 8\}$ $B = \{5; 9; 1\}$. El producto cartesiano AxB será:

$$AxB = \{(6,5); (6,9); (6,1); (8,5); (8,9); (8,1)\}$$

El producto cartesiano BxA será:

$$BxA = \{(5,6); (5,8); (9,6); (9,8); (1,6); (1,8)\}$$

Al comparar **AxB** y **BxA** podemos decir que el producto cartesiano no es conmutativo.

Cuando los conjuntos son finitos, la cantidad de elementos del conjunto **producto cartesiano** es igual al producto de la cantidad de elementos de los conjuntos A y B. En el ejemplo anterior 2x3=6, entonces AxB tiene 6 pares ordenados.

Relaciones

Al vincular elementos de dos conjuntos, o elementos del mismo conjunto se establece una relación entre los mismos.

Dar una relación R entre A y B es fijar una cierta ley que permita decir cuáles son los pares de elementos que se vinculan. Si a (elemento de A) está relacionado con b (elemento de B)

escribimos **a R b** para indicar (a,b) ∈ R. Una relación entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano AxB.

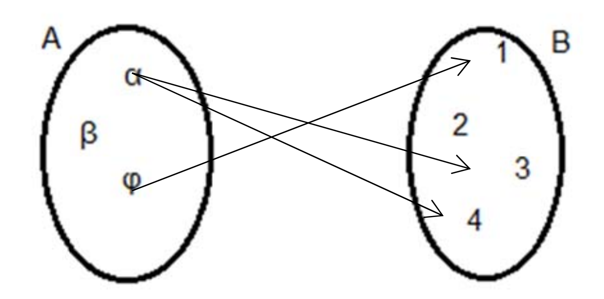
Se llama **relación** R de A en B a toda terna compuesta por un conjunto A llamado "conjunto de partida", un conjunto B denominado "conjunto de llegada" y el conjunto G llamado "gráfica", cuyos elementos son pares ordenados, tales que su primera componente pertenece al conjunto A y la segunda a B.

R = (A , B, G)

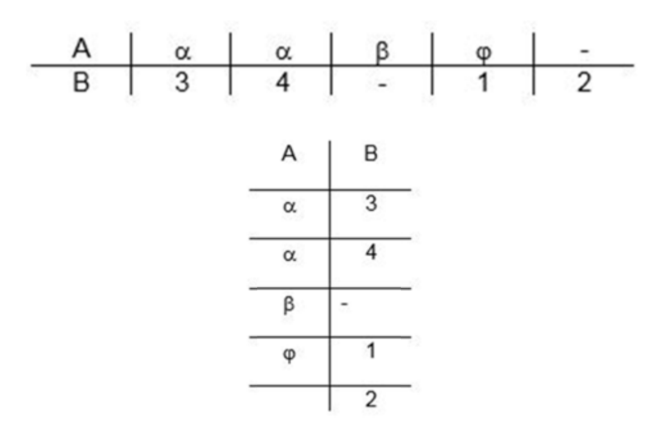
Representación de Relaciones

Tomemos los conjuntos: A = {α;β;φ}; B = {1,2,3,4} y una cierta relación del conjunto A con el conjunto B que puede expresarse mediante:

- flechas en Diagrama de Venn: "las flechas" indican los elementos que se relacionan:



- una tabla de simple entrada, horizontal o vertical:



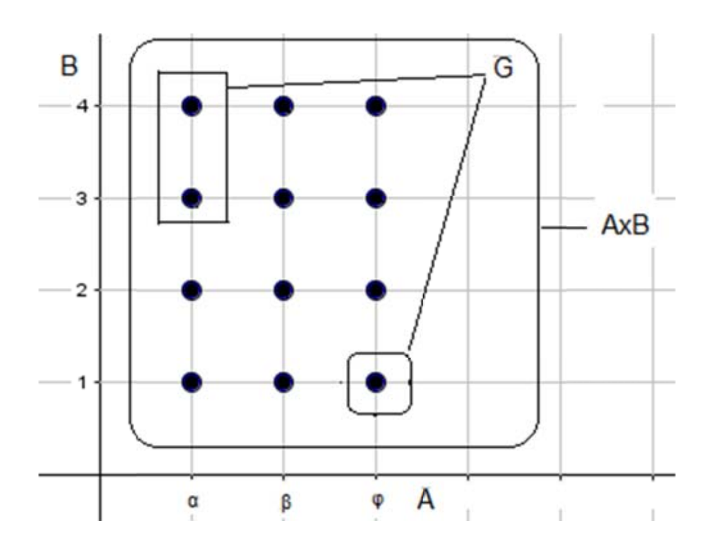
A	α	α	β	φ	-
B	3	4	-	1	2

A	B
α	3
α	4
β	-
φ	1
	2

- una tabla de doble entrada o matriz:

B \ A	1	2	3	4
α			X	X
β				
φ	X			

- puntos del plano en coordenadas cartesianas ortogonales. Se representan los pares ordenados de la relación G = { (α,3); (α,4); (φ,1)}



Dominio e Imagen

Sea R una relación de A en B. Llamamos dominio de R al subconjunto de A formado por aquellos elementos que están vinculados mediante la relación dada con uno o más elementos de B.

Dom R = {a / a$\in$ A $\wedge$ (a,b) $\in$R}

Llamamos imagen de R al subconjunto de B formado por aquellos elementos de dicho conjunto vinculados mediante la relación dada con algún elemento de A.

Im R = {b / b $\in$ B $\wedge$ (a,b) $\in$ R}

Tanto el dominio como la imagen de una relación pueden coincidir eventualmente con los conjuntos de partida A y de llegada B, respectivamente.

Del ejemplo anterior, A = {α; β; φ}; B = {1,2,3,4} ; G = { (α,3); (α,4); (φ,1)}, resulta: Dom R = { α ;φ } e Im R = {1;3;4}

Actividad 1

1.1 Sea $A = \{-1,\ 0,\ 3,\ 4\}$ y $B = \{0,\ 2,\ 4\}$ y sea R_1 la relación definida por:

$R_1 = \{(x, y) / x \in A,\ y \in B \quad \wedge \quad x \leq y\}$

1.1.1 Escribir R_1 como un conjunto de pares ordenados.

1.1.2 Mostrar R_1 sobre un diagrama de Venn.

1.1.3 Representar la relación en un Sistema Cartesiano Ortogonal.

1.1.4 Determinar el dominio y la imagen de R_1.

1.2 Sean los conjuntos:

$A = \{León, Escherichia\ coli, levadura, Ceibo, Trypanosoma\ cruzi\ \}$

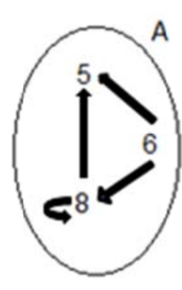
$B = \{Fungi, Plantae, Animalia, Monera, Protista\}$

Indicar qué pares ordenados (x, y) de A × B verifican la relación "x es un organismo que se clasifica dentro del reino y".

Relaciones definidas en A

Algunas relaciones se establecen entre los elementos del mismo conjunto. Es decir, el conjunto de partida y de llegada coinciden. En tal caso escribimos **R = (A, G)** siendo A el conjunto de partida y de llegada, y G la gráfica de la relación.

Por ejemplo, si A = {5,6,8} tal que G = {(6,5),(8,5),(8,8),(6,8)} podemos representar en un único diagrama de la siguiente manera:



Otro ejemplo que podemos considerar es la relación expresada por $x < y$ en el conjunto A={1,2,3,4}. Los pares ordenados que forman la gráfica de la relación son:

G = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)}

El dominio de la relación R es: Dom R = { 1,2,3 }

La imagen de la relación R es: Im R = { 2,3,4 }

Actividad 2

2.1 Dado el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 9\}$ y las relaciones en A:

$R_1 = \{(x, y) / \text{x es divisor de y}\}$

$R_2 = \{(x, y) / x < y\}$

$R_3 = \{(x, y) / y = x^2\}$

Escribir la gráfica y determinar el dominio e imagen de: R_1, R_2 y R_3.

Propiedades de las relaciones definidas en A

Propiedad Reflexiva: una relación definida en A es reflexiva sí y solo sí todo elemento de A está relacionado consigo mismo. Esta definición se simboliza:

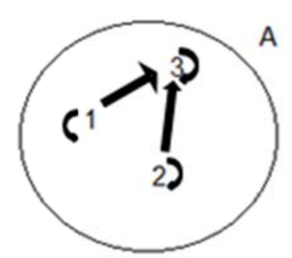
$$R = (A, G) \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \{\forall x / x \in A \Rightarrow (x, x) \in G\}$$

Por ejemplo, entre los alumnos de la clase establecemos la relación: " x tiene la misma edad que y". La relación así definida es reflexiva, ya que toda persona tiene la misma edad que sí misma.

Otro ejemplo pero ahora entre conjuntos numéricos:

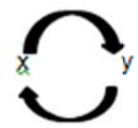
Sea R = (A,G) con A = {1,2,3} y G = {(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}

La relación es reflexiva ya que se verifica que **todo** elemento de A está relacionado consigo mismo. En un diagrama de Venn se puede visualizar que si la relación es reflexiva, en todos los elementos de A deberá verificarse la existencia de un lazo.



Propiedad simétrica: Una relación en A es simétrica cuando se verifica que si un par ordenado pertenece a su gráfica, aquel que se obtiene por permutación de sus componentes, también pertenece.

En símbolos: R =(A,G) es simétrica $\Leftrightarrow [\forall x, \forall y \in A: (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G]$



Desde el punto de vista de su diagrama, la simetría implica que si existe una flecha que vincula dos elementos (por ejemplo de x hacia y), debe existir una flecha de vuelta; dicho de otra forma, el par (y,x) debe pertenecer a la gráfica de la relación.

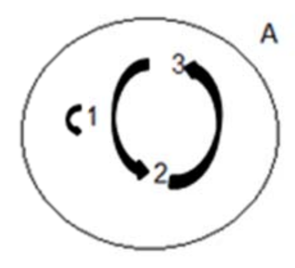
Volviendo al ejemplo " x tiene la misma edad que y ", esta relación resulta ser simétrica ya que: "Manuel tiene la misma edad que Agustín" entonces, "Agustín tiene la misma edad que Manuel".

(Manuel, Agustín) $\in$ G $\Rightarrow$ (Agustín, Manuel) $\in$ G.

Otro ejemplo: Sea A = {1,2,3} y **G** = {(1,1),(2,3),(3,2)}, la relación es simétrica:

$(2,3) \in G \Rightarrow (3,2) \in G$

$(1,1) \in G \Rightarrow (1,1) \in G$



Propiedad transitiva: Una relación definida en A es transitiva, si los pares (x,y) e (y,z) pertenecen a su gráfica, entonces también pertenece el par (x,z).

Simbólicamente: R = (A, G) es transitiva $\Leftrightarrow [\forall x, \forall y, \forall z \in A: (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G]$



La relación " x tiene la misma edad que y" establecida en un conjunto de personas es transitiva: si "Manuel tiene la misma edad que Agustín" y "Agustín tiene la misma edad que Lautaro", entonces "Manuel tiene la misma edad que Lautaro".

(Manuel, Agustín) $\in$ G $\wedge$ (Agustín, Lautaro) $\in$G $\Rightarrow$(Manuel, Lautaro) $\in$G.

Otro ejemplo: Sea A = {1,2,3} y G = {(1,1),(1,2),(2,3),(1,3)}

La relación es transitiva ya que:

$$(1,2) \in G \wedge (2,3) \in G \Rightarrow (1,3) \in G.$$

Observamos que la propiedad transitiva se verifica aun cuando los elementos que intervienen en el estudio no sean distintos. Para el conjunto {1,2}, si G = {(1,1); (1,2)}, la relación resulta transitiva ya que $(1,1) \in G \wedge (1,2) \in G \Rightarrow (1,2) \in G$

Puede justificarse la transitividad para las relaciones establecidas en el conjunto {1,2} que tienen como gráficas G_1= {(1,2);(2,1)} ; G_2= {(2,1);(1,2)} y G_3 = {(1,1)}

Propiedad Antisimétrica: Una relación definida en A es antisimétrica si se verifica:

R = (A,G) es antisimétrica $\Leftrightarrow [\forall x, \forall y \in A: (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \Rightarrow x = y]$

Por ejemplo la relación de menor o igual es antisimétrica; en efecto:

$$A \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$$

Relaciones de equivalencia

R = (A,G) es una relación de equivalencia si y sólo si es **reflexiva, simétrica y transitiva.**

Resumiendo: R es de equivalencia si se verifican simultáneamente:

1) $\forall x \in A;\ x R x$ (reflexividad)
2) $x R y \Rightarrow y R x$ (simetría)
3) $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ (transitividad)

Volviendo al ejemplo " x tiene la misma edad que y " (relación de igualdad). Esta relación, como hemos visto es reflexiva, simétrica y transitiva, resultando ser una relación de equivalencia.

Un ejemplo geométrico es la relación de paralelismo entre rectas del plano. Esta relación es de equivalencia ya que verifica:

1) $\forall r:\ r \parallel r$ (reflexividad).
2) $\forall r_1 ;\forall r_2 :\ r_1 \parallel r_2 \Rightarrow r_2 \parallel r_1$ (simetría).
3) $\forall r_1 ;\forall r_2 ; \forall r_3 :\ r_1 \parallel r_2 \wedge r_2 \parallel r_3 \Rightarrow r_1 \parallel r_3$ (transitividad)

Relaciones de orden

R = (A,G) es una relación de orden si y solo si es **reflexiva, antisimétrica y transitiva.**

1) $\forall x \in A:\ x R x$ (reflexividad)
2) $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$ (antisimétrica)
3) $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ (transitividad)

Por ejemplo, la relación de "menor o igual" en un conjunto numérico es de orden.

Actividad 3

3.1 Sea el conjunto $A = \{a, \text{b, c, d}\}$. Considerar las siguientes relaciones en *A*:

$R_1 = \{\text{(a, a), (a, b), (b, a)}\}$

$R_2 = \{\text{(a, c)}\}$

$R_3 = \{\text{(a,a),(b,b),(c,c)}\}$

$R_4 = \{\text{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)}\}$

$R_5 = A \times A$

Determinar en cuáles se cumplen la reflexividad, la simetría y la transitividad.

3.2 Decidir justificando si:

3.2.1 La relación en el conjunto de personas con la condición de "ser herman@ de" es simétrica.

3.2.2 La relación en el conjunto de los humanos constituida por los pares (x, y) tal que "x ama a y" es simétrica.

3.2.3 En un conjunto de objetos, la relación "tener el mismo peso que" es reflexiva.

3.3 Decidir si las siguientes relaciones son de equivalencia. Justificar la respuesta:

3.3.1 Relación de perpendicularidad entre las rectas del plano.

3.3.2 La relación "es herman@ de".

Función

Muchas veces escuchamos o hemos dicho:

- La **función** del docente es explicar los temas…
- El éxito de la temporada está en **función** de la cantidad de turistas …
- La recaudación está en **función** de los espectadores …
- La **función** del corazón es bombear sangre a todo el organismo…
- La **función** de las 14hs. se suspendió…

Si miramos el diccionario:

Función[3] *

Del lat. *functio, -ōnis.*

1. f. Capacidad de actuar propia de los seres vivos y de sus órganos, y de las máquinas o instrumentos.

2. f. Tarea que corresponde realizar a una institución o entidad, o a sus órganos o personas.

3. f. Acto solemne, especialmente el religioso.

---

[3] http://dle.rae.es/?id=IbQKTYT 7/10/2016

4. f. Representación de un espectáculo, especialmente teatral, o proyección de una película. U. t. en sent. fig.

5. f. Obra teatral representada o película proyectada.

6. f. Fiesta mayor de un pueblo o festejo particular de ella.

7. f. Convite obligado de los mozos.

8. f. Escándalo o alboroto que se produce en una reunión.

9. f. Ling. Papel relacional que, en la estructura gramatical de la oración, desempeña un elemento fónico, morfológico, léxico o sintagmático.

10. f. Ling. Finalidad de los mensajes verbales. *La función expresiva del lenguaje.*

11. f. Mat. Relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo o ninguno.

12. f. Mil. Acción de guerra.

La palabra función es de uso cotidiano y tiene distintos significados. En Matemática, ¿qué entendemos por función? El concepto está relacionado con la definición 11, pero ésta no es del todo correcta.

Una relación R es una **función** de A en B si y sólo si **todo** elemento de **A** está relacionado con **uno y sólo un** elemento de **B**.

Cuando R es una función de A en B, se utiliza f en lugar de R y se simboliza: **f : A → B**. Además de la letra f, se utilizan para indicar funciones las letras g, h, etc.

Para que una relación sea función deberán cumplirse, de acuerdo a la definición, dos condiciones:

- **Existencia:** Para todo elemento $a \in A$, debe existir un elemento $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$ que le corresponda.
- **Unicidad:** Ese elemento $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$, debe ser único.

Si se considera una función **f : A→ B** y se sabe que un par de valores **(x,y)** satisface esa relación funcional, se escribe **y = f(x)** que se lee " **y** es igual a **f de x**".

Otra forma de definir función es a partir de variables en lugar de conjuntos. Decimos que:

Una **función** entre dos variables es una relación que asocia a cada valor de la variable independiente uno y sólo uno de la variable dependiente; o bien: una variable **y,** se dice que es función de una variable **x**, cuando a cada valor de x le corresponde uno y sólo un valor de y.

Lo simbolizamos: **y=f(x)** donde **x** representa la variable independiente e **y** la variable dependiente.

La función **f** toma un valor **x** de la variable independiente y devuelve un valor de la variable dependiente, **y**.

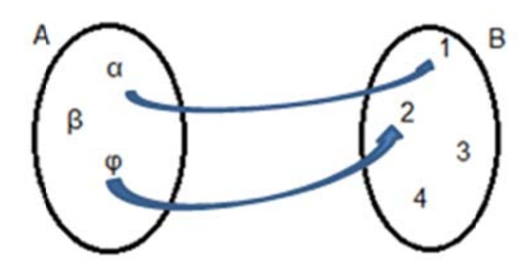
Dominio e Imagen

El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama conjunto de partida o dominio de la función. Se suele simbolizar **Dom f**

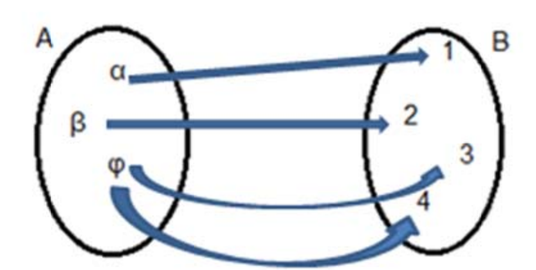
La imagen es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Algunos ejemplos son:

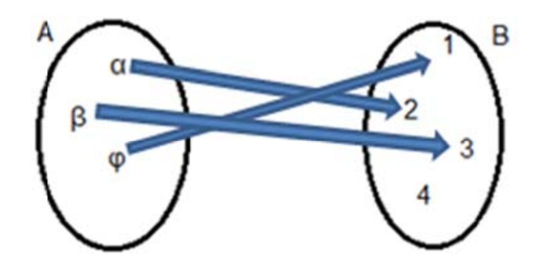
- La relación representada por el diagrama de Venn no es función ya que el elemento β perteneciente a A no está relacionado con ningún elemento del conjunto B. En este caso no se verifica la condición de existencia.



- La relación representada en el diagrama de Venn de la figura tampoco es una función porque no cumple la condición de unicidad, ya que del elemento φ de A parten dos flechas al conjunto B



- La relación de la figura es función, ya que se cumplen las dos condiciones establecidas: existencia y unicidad. Dicho de otro modo, una relación es funcional si de cada elemento del conjunto A de partida sale una y sólo una flecha.



Del análisis de los ejemplos anteriores, concluimos que para decidir si una relación establecida entre los elementos de dos conjuntos es una función, basta con observar el conjunto de partida.



Si una relación entre conjuntos es una función, su dominio y el conjunto de partida deben coincidir.

Actividad 4

4.1 Sea $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $B = \{10, 11, 12, 13\}$. Determinar si la siguiente tabla define una función de A en B. Justificar la respuesta.

x	A	4	5	6	7	8
y	B	10	11	10	10	11

4.2 Indicar cuáles de las siguientes relaciones son funciones. Justificar.

4.2.1. $F: R \to R \quad F = \{(x,y)/x \in R, y \in R \wedge y = x\}$

4.2.2. $F: N \to N \quad F = \left\{(x,y)/x \in N, y \in N \wedge y = \frac{3}{2}x\right\}$

4.2.3. $F: N \to N \quad F = \{(x,y)/x \in N, y \in N \wedge y = 6x + 4\}$

4.2.4. Sea A = {habitantes de la ciudad de La Plata}

$F = \{a_1 \text{ es padre de } a_2\}$

4.2.5. A cada ciudad de la provincia de Río Negro se le asocia la cantidad de habitantes según el último censo.

4.2.6. A cada río de Argentina se lo vincula con las provincias cuyo territorio recorren.

4.3. Dar dos conjuntos A y B y una relación entre los elementos de ellos que:

4.3.1 Sí sea función. Representarla en la forma más conveniente.

4.3.2 No sea función. Representarla en la forma más conveniente.

4.4 Dados los conjuntos:

A = {Santa Rosa, Córdoba, Paraná}

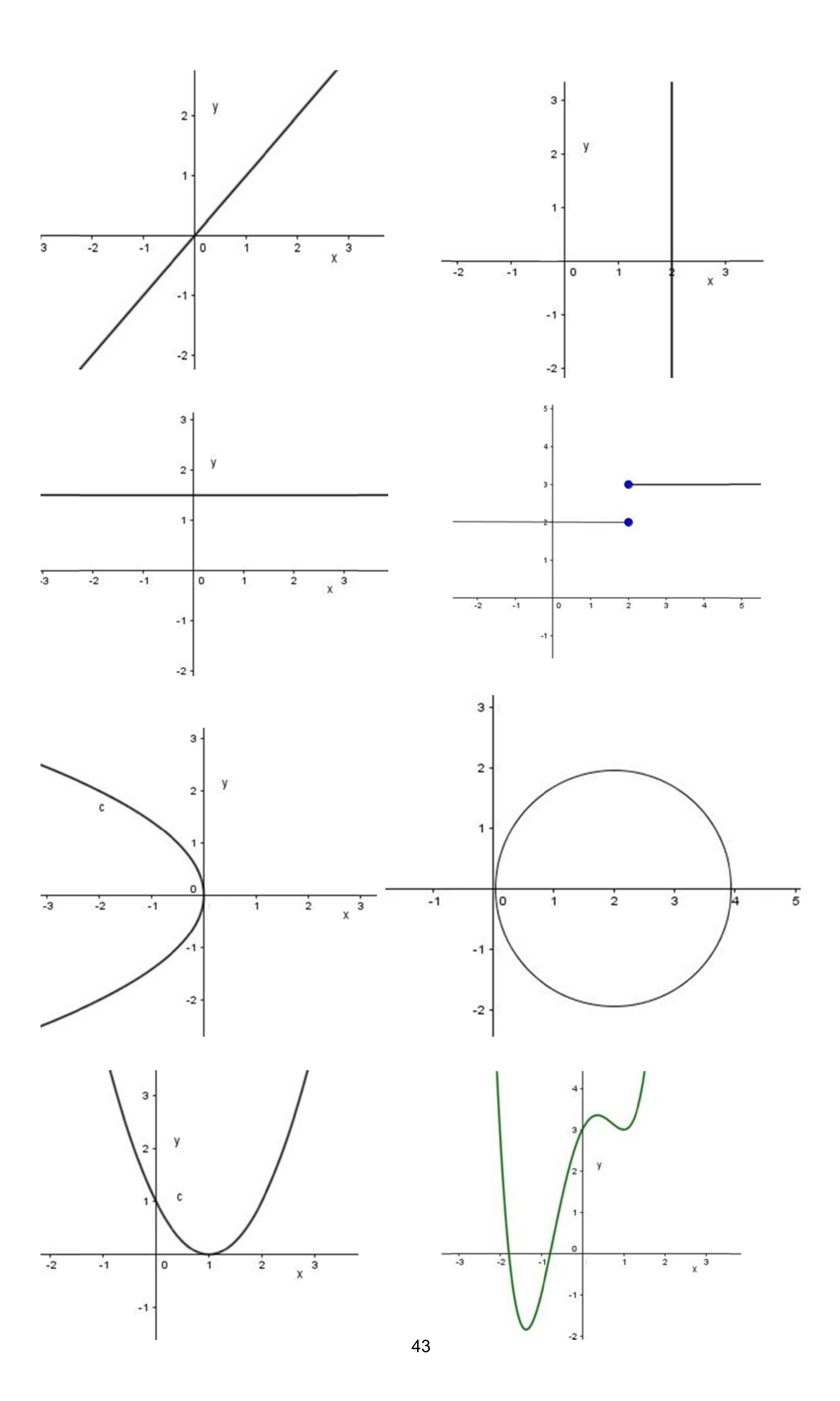
B = {Entre Ríos, Córdoba, La Pampa, Misiones}

La relación de A en B “es capital de” ¿verifica las condiciones para ser función? Justificar.

4.5 Considerar las siguientes gráficas G: R —> R

4.5.1. Indicar cuáles corresponden a funciones. Explicar.

4. 5.2. De aquellas que sean funciones, indicar dominio e imagen.



y
x
c

De lo visto anteriormente, decimos que una función puede definirse a través de una fórmula, un gráfico, una tabla, o un texto.

Funciones numéricas

Las funciones que estudiamos en general tienen como conjunto de partida y conjunto de llegada a los números reales. Estas funciones se conocen como funciones reales de variable real.

Una función numérica tiene como dominio el subconjunto más amplio de los números reales en el que tiene sentido la fórmula que la define.

Actividad 5

5.1 Hallar el dominio de las siguientes funciones dadas a partir de su expresión algebraica. Graficar en forma aproximada. Determinar la imagen de cada una de ellas.

5.1.1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

5.1.2 $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

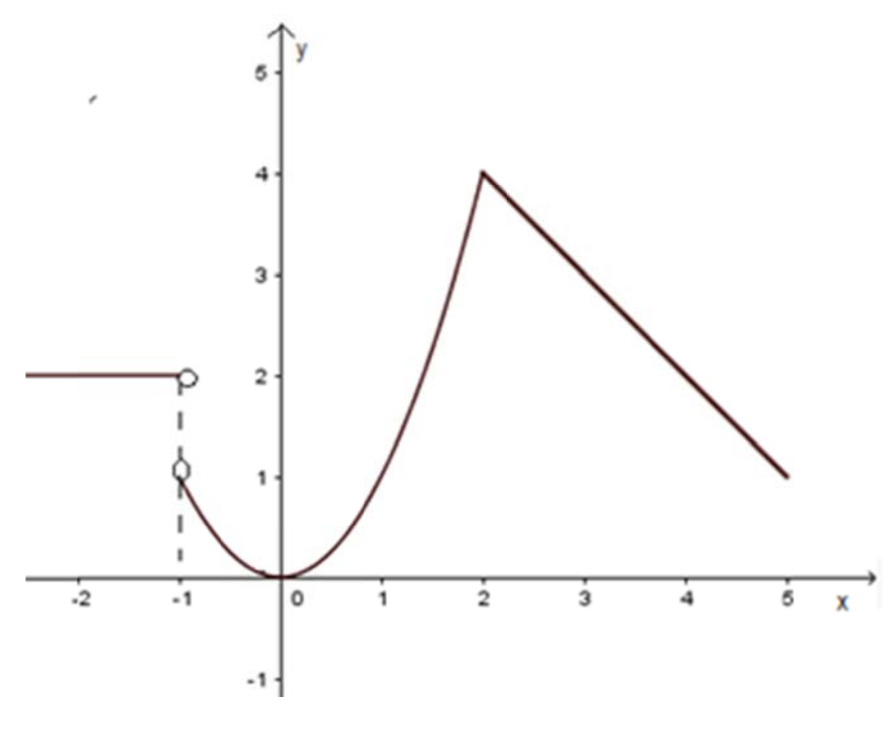
5.1.3 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

5.1.4 $f(x) = \sqrt{x + 3}$

5.1. 5 $f(x) = x^2 + 2$

5.1.6 $f(x) = 2x$

5.2 Dada la siguiente gráfica establecer cuál debe ser el dominio para que:



5.2.1 Sea una función.

5.2.2 No sea una función.

Función lineal

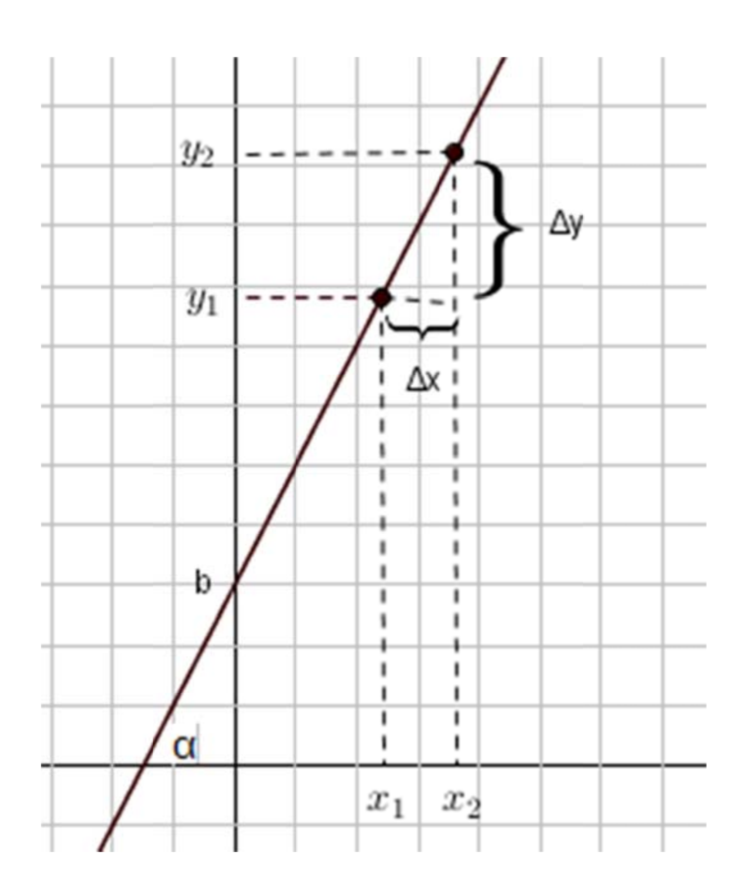
Las funciones definidas por la expresión de la forma: $f(x) = mx + b$ con m y b números reales se las llama **función lineal**, donde $f: R \to R$

La representación de la función lineal en el plano cartesiano es una recta.

La ecuación explícita de la recta es $y = mx + b$ donde m es la **pendiente** y b **la ordenada al origen**.

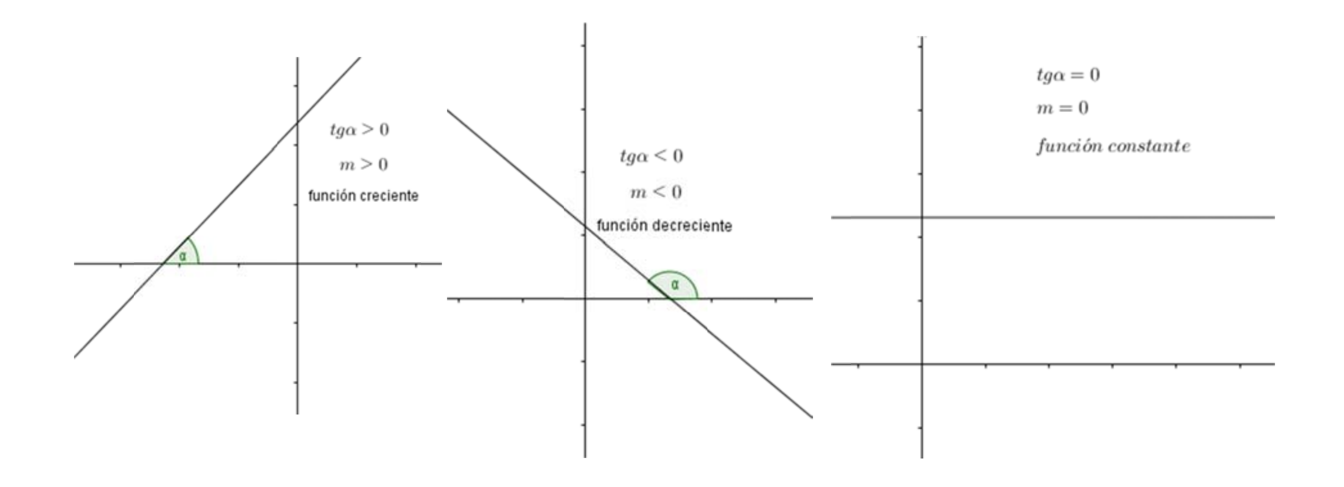
La pendiente de una recta es el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx) de cualquier par de puntos de la misma.

$$\to m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Observando la representación y el triángulo rectángulo que se forma, podemos decir que la pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas. En símbolos: $m = tg \propto$

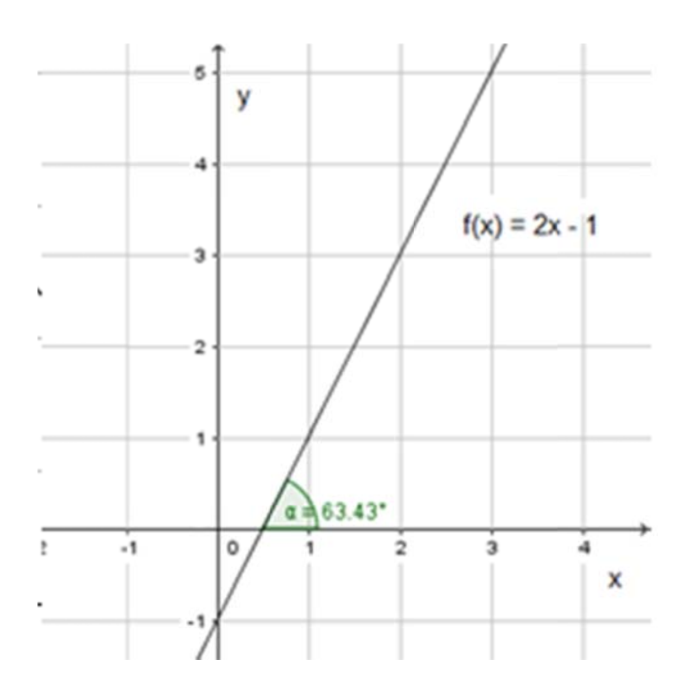
El valor de la pendiente determina que una función sea **creciente, decreciente** o **constante.**



Por ejemplo, en la función f: R→R / f(x) = 2x – 1 la pendiente es 2. Podemos decir entonces que $tg \propto = 2$ y el ángulo que forma con el eje x es de $63^0 26' 5''$. La ordenada al origen es y= -1.

Para graficar una recta alcanza con conocer dos puntos pertenecientes a la misma.

La recta que representa a esta función está dada por la gráfica:



La intersección de una curva con el eje de abscisas se denomina **abscisa al origen, cero o raíz.** En ese punto la ordenada toma valor cero. Por eso, para encontrar este valor se iguala la ecuación a cero y se despeja el valor de la variable independiente. En el caso de la recta este punto es único.

Para nuestro ejemplo la abscisa al origen está en x=0,5; es decir, la recta pasa por el punto (0,5;0)

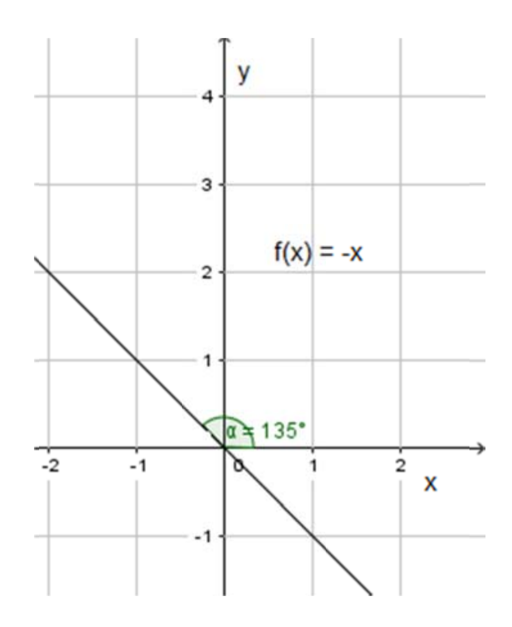
La intersección con el eje de ordenadas se denomina **ordenada al origen.** En ese punto la abscisa vale 0. Por eso, para encontrar este valor se reemplaza la x por cero. En nuestro caso la segunda componente del par (0,-1) es la ordenada al origen.

Otro ejemplo, f: R →R / f(x) = -x

La pendiente es -1.

La ordenada al origen es y=0

La función decrece en todo su dominio.



Actividad 6

6.1 Representar gráficamente las funciones lineales $f : R \to R$ de la forma $f(x) = mx + b$ con m, b $\in R$

6.1.1 $f(x) = 2x - 3$

6.1.2 $f(x) = -2x - 3$

6.1.3 $f(x) = 4$

6.1.4 $f(x) = \frac{1}{3}x$

6.1.5 Hallar en cada caso, los valores $f(-2)$ y $f(2)$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

6.2 Hallar la fórmula de la función lineal que cumple las siguientes condiciones:

6.2.1 Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$

6.2.2 Pasa por el punto (0, 2) y tiene pendiente *m* = 3

6.2.3 Pasa por el punto (-3, 5) y es paralela al eje *x*.

6.2.4 Forma un ángulo de $120^{\underline{0}}$ con el eje de abscisas.

6.2.5 Corta a los ejes en los puntos P(5, 0) y Q(0, -3).

6.2.6 Pasa por los puntos (2, -3); (-4,3)

6.2.7 Pasa por los puntos (-4,3); (0,0)

6.2.8 Pasa por los puntos (1/3 , 1/2) y (-5/6 , 2/3)

6.2.9 Pasa por los puntos (-2,1; 0,3); (2,3; 1,4)

6.3 Resolver y graficar. Justificar la respuesta:

6.3.1 Escribir la ecuación explícita de la recta que no pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de $60^{\underline{0}}$ con el eje de las abscisas.

6.3.2 ¿Puede una recta tener ordenada al origen negativa?

6.3.3 ¿Puede una recta tener ordenada al origen nula?

6.3.4 Si una recta tiene pendiente nula ¿cuál es su ecuación?

6.3.5 En un mismo gráfico representar las siguientes rectas:

6.3.5.1 y=0

6.3.5.2 y=-3

6.3.5.3 y=0,5

6.3.5.4 x=0

6.3.5.5 x =4

6.3.5.6 x=-7/2

En cada caso indicar pendiente y ordenada al origen, si existen.

6.4 Una represa cuya capacidad es de 116 millones de litros de agua, tiene una filtración. Desde el primer día del mes pierde agua de manera uniforme[4], a razón de 18 millones de litros diarios, aproximadamente.

6.4.1 Se desea hallar la fórmula de la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día. Graficar la función. Indicar dominio e imagen.

6.4.2 ¿En cuánto tiempo se podría vaciar la represa, en el caso que no se solucione el problema de la pérdida de agua?

6.4.3 ¿En cuánto tiempo la represa tendría 70 millones de litros de agua?

6.5 En las víboras hembras Lampropeltis Polizona, se sabe que la longitud total "casi" varía linealmente respecto de la longitud de la cola. A partir de los siguientes datos experimentales obtener la ecuación de la recta que representa la longitud total de la cola.

x = longitud de la cola	y = longitud total
60 mm	455 mm
140 mm	1050 mm

6.6 Un antropólogo puede utilizar las funciones lineales para estimar la estatura de una persona, dada la longitud de alguno de sus huesos. El húmero es el hueso del brazo entre el hombro y el codo. La estatura, en centímetros, de un hombre y de una mujer con un húmero de longitud x, está dado por $M(x) = 2,89\,x + 70,64$ y $F(x) = 2,75\,x + 71,48$ respectivamente. Se desea saber cuál sería la estatura si el hueso encontrado era de 35 cm.

6.6.1 En el caso de una mujer.

6.6.2 En el caso de un hombre.

Sugerimos leer el capítulo 9: "Estimación edad a partir de colecciones osteológicas documentadas", donde se presenta una función lineal.

6.7 A fin de estimar las anchuras faciales inferiores (diámetro bigonial en cm) para niñas de 6 años de edad a partir de datos extraídos a los 5 años, se procedió a tomar esta

[4] uniforme cuando su velocidad es constante en el tiempo, dado que su aceleración es nula.

medida en 10 niñas de 5 años, repitiendo la operación en las mismas niñas un año después. Los resultados obtenidos en el estudio se presentan a continuación. Cada registro corresponde a una niña en particular.

Registro Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
De 5 años	7,33	7,49	7,20	7,90	7,50	7,80	7,16	7,10	6,94	7,40
De 6 años	7,53	7,70	7,40	8,20	7,80	8,10	7,70	7,20	7,10	7,70

Ubicar en un gráfico de coordenadas cartesianas los pares ordenados correspondientes a cada registro utilizando, como primer elemento del par, al diámetro bigonial a la edad de 5 años.

En dicho gráfico podrá observar que los puntos se disponen siguiendo un patrón bien definido de tipo rectilíneo, pero con cierto grado de error (generado fundamentalmente por diferencias en el genotipo y/o fenotipo de las niñas, y errores de medición cometidos en la recolección de los datos). El paso siguiente en la investigación es el de modelizar dicha relación lineal ($y = mx + b$). En este sentido, es necesario encontrar los valores numéricos para la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) que definan la recta que mejor ajuste los datos. A tal fin, se puede recurrir a expresiones asociadas a técnicas estadísticas, que permiten estimar los valores buscados a partir de los datos de estudio.

Con los valores anteriormente calculados, podemos decir que la recta que se ajusta es:

$$y = 1{,}0949\,x - 0{,}4397$$

Hallar la posible anchura facial que tendrá una niña de 6 años si a los 5 años tiene un ancho de 7,43cm.

6.8 De los anales del registro civil se obtuvieron los siguientes datos de matrimonios y nacimientos para distintos años:

Registro	1	2	3	4	5	6
Nacimientos	1920	3528	2000	2500	5000	5600
Matrimonios	5200	7801	3106	4620	9000	11600

Repitiendo los mismos pasos que en el ejercicio anterior con estos datos, utilizando el número de matrimonios como variable x, la relación queda expresada como $y = 1{,}9152x + 328{,}99$

Estimar utilizando la recta obtenida, el número de nacimientos para un año en el que hubo 4923 matrimonios.

Nos preguntamos: ¿Son pertinentes los resultados?

En el caso de las niñas es esperable que crezcan y si bien no necesariamente todas ellas lo hacen con el mismo ritmo parece bastante lógico que al aumentar su edad cronológica aumente su mandíbula, pero en el caso de los nacimientos y los matrimonios el

problema no es tan sencillo. Cabe esperar que si aumenta el número de matrimonios habrá más nacimientos (diferidos en al menos 9 meses), pero el hecho de nacer depende también de otros factores, como puede ser una crisis económica que desaliente el tener descendencia, o lo contrario, es decir una prosperidad que haga atractivo vivir en matrimonio pero sin hijos para poder viajar en cualquier momento. También existe la posibilidad de nacimientos sin que provengan de matrimonios registrados, ya que ésta es una cuestión de origen cultural. Para estudiar el caso deberíamos contar con algunos otros elementos de juicio. No siempre los cálculos matemáticos dan respuesta a los problemas, la solución depende de las "condiciones de contorno".

Función cuadrática

La función definida de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, a,b y c números reales se denomina **función cuadrática;** siendo su gráfica una **parábola.** El dominio está dado por los números reales.

La característica fundamental que define a esta función es la simetría.

Podemos determinar el eje de simetría con la siguiente expresión: $x_v=-\frac{b}{2a}$

El vértice se encuentra sobre el eje de simetría y tiene coordenadas $V(x_v; f(x_v))$

Si $a>0$ la parábola "se abre" hacia arriba. En este caso, la función decrece de $(-\infty;x_v)$ y crece de $(x_v;+\infty)$. Decimos que la función es **cóncava.**

Si $a<0$ la parábola "se abre" hacia abajo. En este caso, la función crece de $(-\infty;x_v)$ y decrece de $(x_v;+\infty)$. Decimos que la función es **convexa.**

Las raíces se encuentran al igualar la fórmula de la función a cero. Recordemos la expresión que nos ayuda, llamada fórmula resolvente o fórmula de Bhaskara:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si estos valores existen se puede escribir la expresión de manera **Factorizada** así: $f(x)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación.

Por ejemplo, si tenemos la función f: R →R / $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

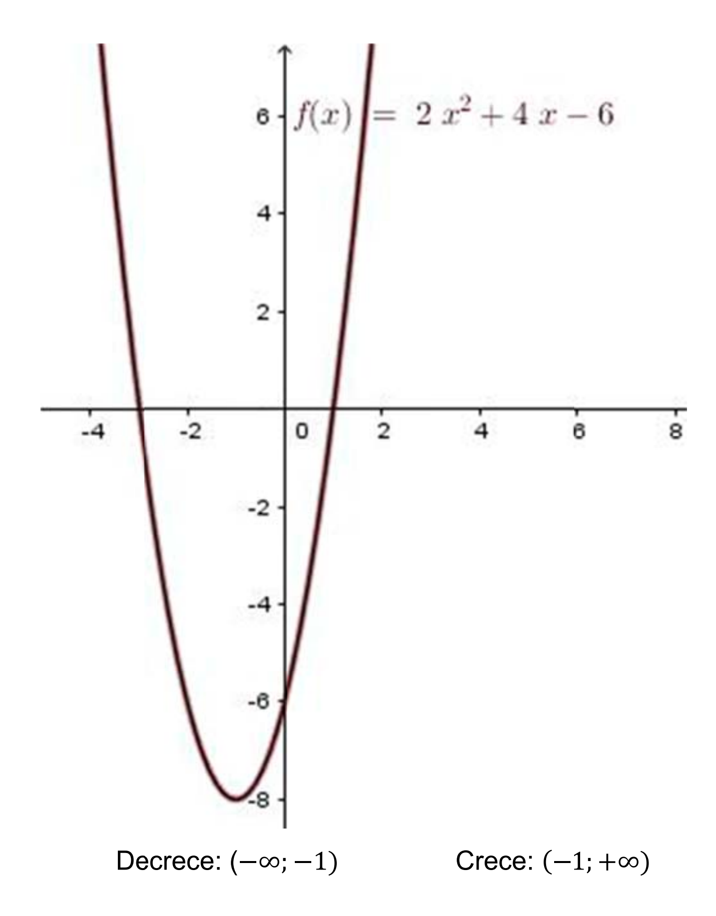
Como la expresión es polinómica, vemos que $a=2 \quad b=4 \quad c=-6$

Aplicando la fórmula para hallar el eje de simetría obtenemos x_v= -1. Luego, para obtener el vértice reemplazamos este valor en la fórmula: f(-1)= -8. Entonces el vértice estará en el punto V (-1;-8). Lo ubicamos en el sistema de ejes cartesianos.

Como el valor de a es positivo, las ramas irán "hacia arriba". Observando el vértice y esta condición, nos damos cuenta que cortará dos veces al eje x. Para hallar estos valores, aplicamos la fórmula resolvente, y obtenemos: x_1=-3 y x_2=1

La ordenada al origen la hallamos haciendo f(0); obtenemos y= -6. Este valor coincide con el término independiente de la fórmula.

La imagen de esta función está dada por: $[-8;+\infty)$



Decrece: $(-\infty; -1)$ Crece: $(-1; +\infty)$

Otra forma de representar gráficamente la función cuadrática consiste en tomar los puntos de una tabla de valores:

x	f(x)
-4	10
-3	0
-2	-6
-1	-8
0	-6
1	0
2	10
3	24

Vemos que existen elementos pertenecientes al dominio de la función que tienen la misma imagen: (-4,10) y (2,10); (-3,0) y (1,0); (-2,-6) y (0,-6); esto nos muestra que el eje de simetría estará entre esos pares. Para ubicar la posición del eje de simetría, se toma cualquier conjunto de pares ordenados que tengan la segunda componente igual y se efectúa la semisuma de las primeras componentes:

Por ejemplo, para los pares (-2,-6) y (0,-6): $\rightarrow$ $x = \frac{-2+0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

El eje de simetría resulta ser el conjunto de puntos $\{(x,y)/x=-1\}$ que corresponde a una recta paralela al eje y.

La intersección de la parábola con el eje de simetría es el vértice; en nuestro caso la abscisa es $x=-1$ y la correspondiente ordenada será $\rightarrow$ $f(-1)=-8$

El vértice es el punto $(-1;-8)$

La parábola es cóncava debido a que el coeficiente principal es positivo.

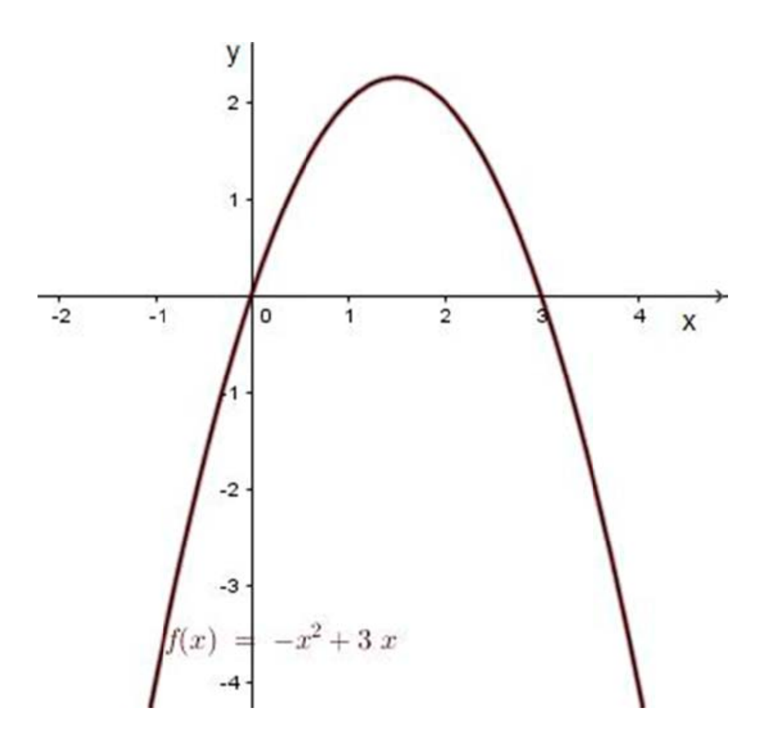
Por ser los ceros de la función -3 y 1, y el coeficiente principal a = 2, la función puede expresarse de manera factorizada así:

$$f:R\rightarrow R/f(x)=2(x+3)\cdot(x-1)$$

Veamos otro ejemplo: f: R →R / $f(x) = -x^2 + 3x$

La expresión se puede factorizar así: $f(x) = -x(x-3)$. De esa expresión podemos "leer" que las raíces estarán en x = 0 y en x = 3. De ello deducimos que el eje de simetría estará en x_v= 1,5. El vértice tendrá como ordenada f(1,5) = 2,25; será el punto V(1,5; 2,25). La ordenada al origen coincide con una raíz (0;0). Como el coeficiente principal es negativo (a=-1), las ramas irán "hacia abajo". Con estos puntos podemos graficar la parábola:

La imagen será $(-\infty; 2{,}25]$



Crece: $(-\infty; 1{,}5)$ Decrece: $(1{,}5; +\infty)$

Otro ejemplo: $f: R \rightarrow R \;/\; f(x) = x^2 - x + 2$

$$a = 1 \;\; b = -1 \;\; c = 2$$

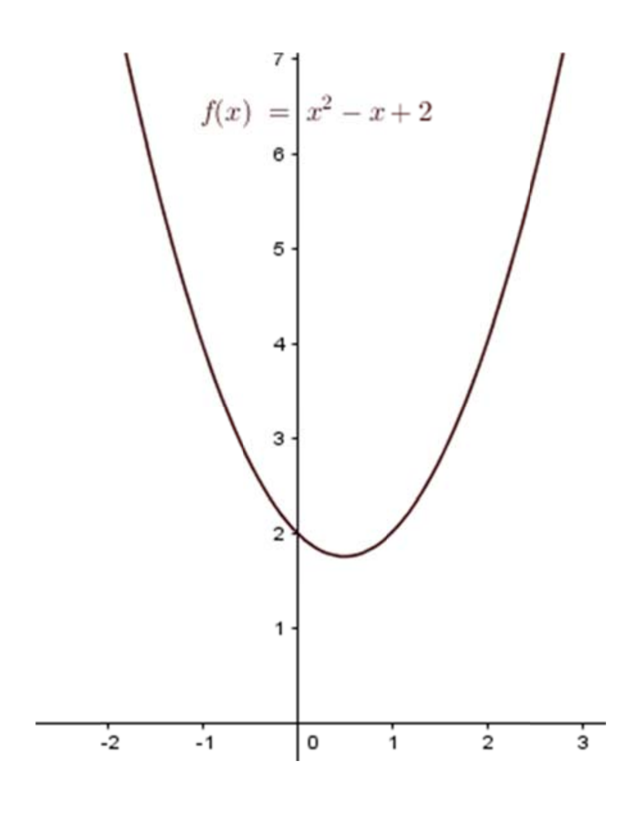
El eje se simetría: $x_v= \frac{-(-1)}{2.1}=\frac{1}{2}$

El vértice estará en V(0,5; f(0,5))es decir, en V(0,5; 7/4)

Como a es positivo, las ramas serán hacia arriba. Con esta información y el vértice, podemos decir que no cortará al eje x; es decir, no tiene raíces.

La ordenada al origen estará en f(0)= 2

La imagen está dada por: $\left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$



Decrece: $(-\infty; 0{,}5)$ Crece: $(0{,}5; +\infty)$

Actividad 7

7.1 Representar las siguientes parábolas, indicar eje de simetría, vértice, ordenada al origen, ceros, concavidad, crecimiento, decrecimiento e imagen:

7.1.1 $y = x^2 + 3$ 7.1.2 $y = -4x^2 + 1$ 7.1.3 $y = x^2 + 2x$ 7.1.4 $y = x^2 - 4x - 5$

7.1.5 $y = 2(x+1)^2 - 1$ 7.1.6 $y = x^2 - 2x$ 7.1.7 y = $x^2 + x + 1$ 7.1.8 y = $-x^2 + 6x - 9$

7.2 Estudiando la composición del aire entre las hojas de un campo de hierba alta se ha observado que la concentración de anhídrido carbónico varía a lo largo del día. Se han tomado datos durante las 24 horas del día y se ha concluido que la concentración media C medida en v.p.m. (volumen por millón) en función de la hora del día t, viene dada por la expresión:

C(t) = $2t^2$ -48t + 550.

7.2.1 ¿En qué momento se alcanza la menor concentración?¿De cuánto es?

7.2.2 Explicar en qué tiempo la concentración aumenta y cuándo disminuye.

7.2.3 Graficar de manera aproximada. Indicar dominio e imagen.

7.2.4 ¿Qué interpretación tiene la ordenada al origen y las raíces en esta situación?

7.3 Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje P de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un período fue de $f(P)$, donde:

$$f(P) = -\frac{1}{50}P^2 + 2P + 20 \qquad 0 \leq P \leq 100$$

7.3.1 ¿Cuál fue el máximo peso ganado? ¿Con qué porcentaje de proteína se alcanzó?

7.3.2 Indicar con qué porcentaje el peso aumenta y cuándo disminuye.

7.3.3 Graficar de manera aproximada. Indicar dominio e imagen.

7.3.4 ¿Qué interpretación tiene la ordenada al origen y las raíces en esta situación?

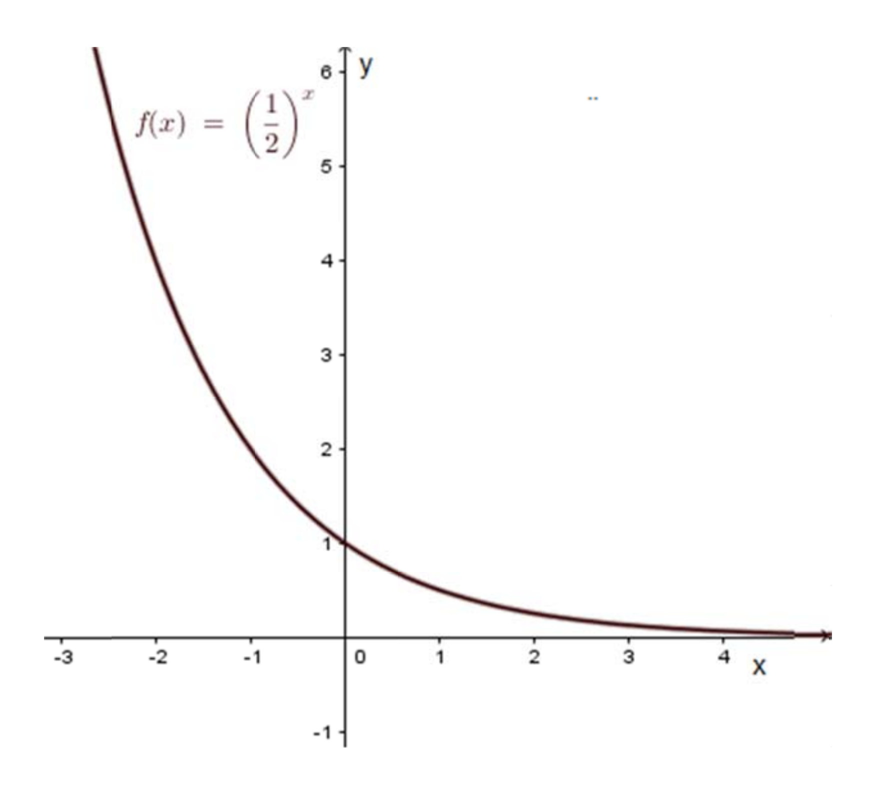
Función exponencial

Las funciones exponenciales tiene la siguiente expresión: $f(x) = a^{b.x}$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$ y $b \in R - \{0\}$

El dominio son los números reales.

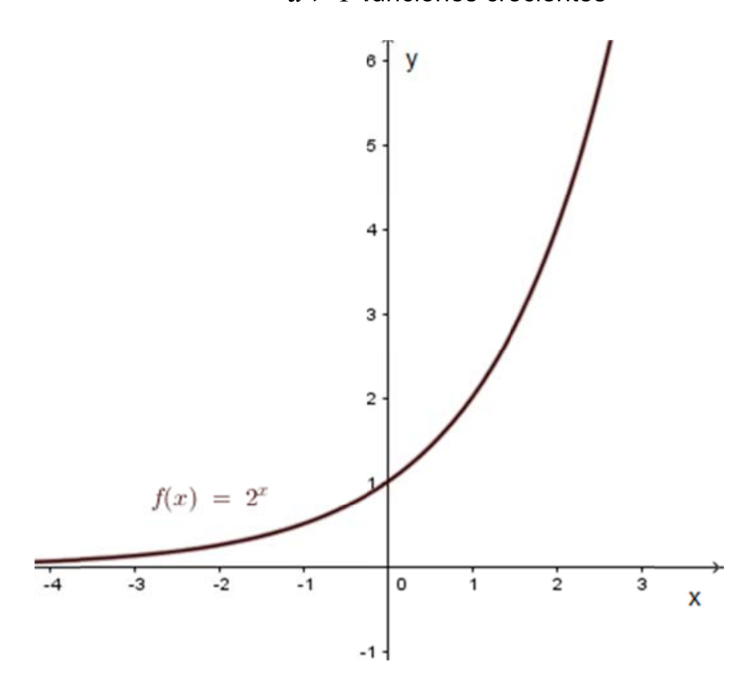
- Funciones de la for ma $f(x) = a^x$

$0 < a < 1$ funciones decrecientes.



La imagen son todos los reales positivos.

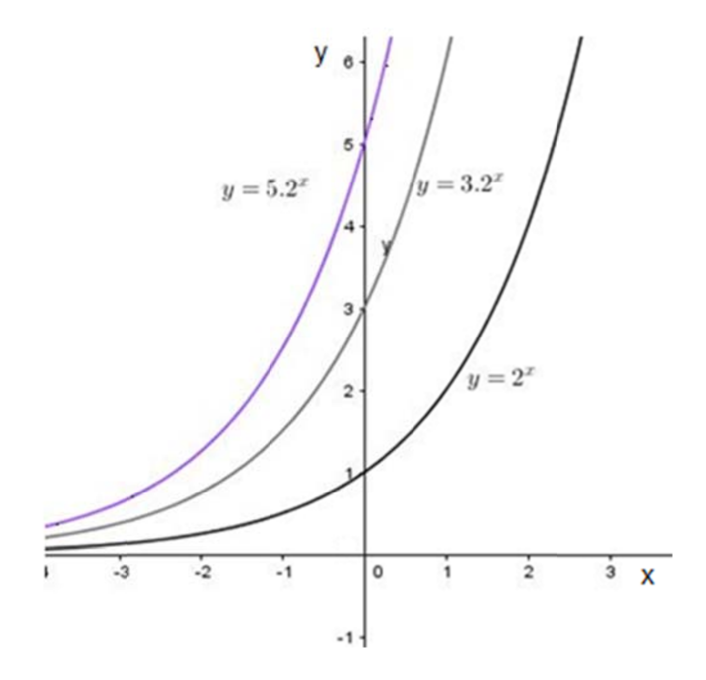
$a > 1$ funciones crecientes



También la imagen es:(0;+ ∞)

- Funciones exponenciales de la forma: $f(x) = k.a^x \wedge k \in R - \{0\}$

El valor de k modifica el valor de la ordenada al origen.



Las funciones exponenciales aparecen en el estudio de muchas poblaciones. Veamos el siguiente ejemplo:

Un equipo de biólogos está interesado en estudiar la reproducción de unas aves migratorias que llegan a una reserva de Costa Rica. Estas aves tienen un solo período de reproducción al año. Realizan el conteo de la población al final del período de reproducción desde 2005 hasta 2011 obteniendo los datos que aparecen en esta tabla:

Año	Tiempo t desde 2005 (en años)	Población en el año t	Incremento	Porcentaje de crecimiento
2005	0	230		
2006	1	264	34	0,149
2007	2	303	39	0,148
2008	3	348	45	0,149
2009	4	400	52	0,149
2010	5	460	60	0,153
2011	6	529	69	0,150

La población no crece de manera lineal, ya que por cada año que transcurre el número de individuos no aumenta la misma cantidad. Es decir la relación entre el tiempo y la cantidad de aves no es proporcional, por eso el modelo lineal no se adapta a esta situación.

Si miramos los datos, la relación que se da entre el incremento de la población y la población al iniciar el año, es practicamente la misma para todos los años.

$$\frac{incremento\ anual}{población\ al\ inicio\ del\ año} \approx 0{,}15$$

Es decir, el porcentaje de variación se mantiene constante alrededor del 15% (última columna de la tabla).

Bajo ciertas condiciones podemos suponer que la población se incrementa en el mismo porcentaje (no la misma cantidad) para el mismo período de tiempo. La expresión que describe esta relación está dada por:

$$F(t) = P_0(1 + r)^t$$

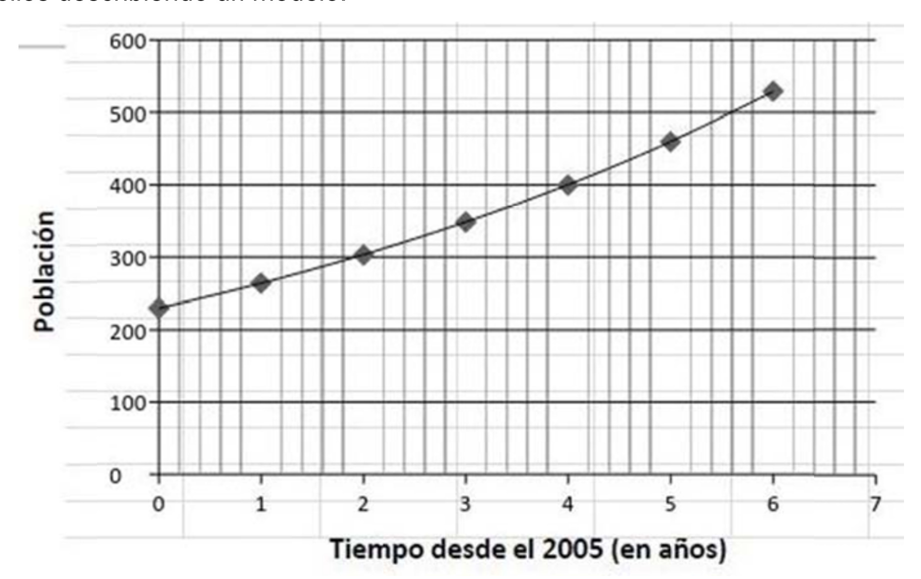
Donde t representa el tiempo, P_0 es la población inicial para el tiempo $t = 0$ (es decir, el inicio del estudio) y r es el porcentaje de crecimiento (o de decrecimiento) para el tiempo t. Si es crecimiento, se suma r, pero si es decrecimiento se resta r.

Volviendo al ejemplo, podemos decir que la población, a medida que transcurre el tiempo se describe mediante la expresión: $F(t) = 230(1{,}15)^t$ siendo la población inicial de 230, y la razón de crecimiento 0,15.

Si calculamos los datos según este modelo y los comparamos con los tomados tenemos:

Año	Tiempo t desde 2005 (en años)	Población en el año t	F(t)
2005	0	230	230
2006	1	264	264,5
2007	2	303	304,18
2008	3	348	349,80
2009	4	400	402,27
2010	5	460	462,61
2011	6	529	532

La siguiente gráfica muestra los puntos que representan los datos reales y la curva que se ajusta a ellos describiendo un modelo.



Actividad 8

8.1 Una especie de mamíferos se reproduce una sola vez al año. Al inicio de la investigación se encontraron 436 individuos y al año, 567. Si cada año el incremento es el mismo porcentaje.

8.1.1 ¿Qué modelo describe este comportamiento?

8.1.2 ¿Qué población habrá al cabo de 10 años?

8.1.3 Graficar de manera aproximada. Indicar dominio e imagen.

8.1.4 ¿Qué representan los ceros y la ordenada al origen?

8.2 Una población de aves se incrementó de 3200 ejemplares a 3254 al cabo de un año. Suponiendo un período de reproducción anual con una tasa porcentual anual constante. ¿Cuál es ese porcentaje de incremento?

Los organismos nacen y mueren sin tener una fecha específica para hacerlo, esto hace que el conteo de la población debe considerarse como un fenómeno continuo en el tiempo y no discreto, es decir, no se produce mediante saltos.

Veamos un ejemplo:

Una población de 10000 bacterias en un cultivo se reproduce con una tasa porcentual constante del 5% semanal.

El modelo se representa mediante la expresión: $F(t) = 10000(1,05)^t$

a) ¿Cuál será la población de bacterias al cabo de dos semanas suponiendo que se reproducen una vez cada semana?

Tenemos que calcular F(2):

$F(2)= 10000(1,05)^2= 11025$

Las bacterias al cabo de dos semanas serán 11205.

b) ¿Cuál será la población de bacterias al cabo de dos semanas suponiendo que se reproducen una vez por día?

En esta situación tenemos que pensar una tasa porcentual diaria. Considerando una semana de 7 días, la tasa de crecimiento por día será el cociente entre la tasa semanal y el número de días:0,05/7. Además, como se pide para dos semanas, t = 14

Reemplazando: $F(2)= 10000(1 + 0,05/7)^{14}= 11047,78$

c) ¿Cuál será la población de bacterias al cabo de dos semanas suponiendo que se reproducen una vez por hora?

d) ¿Cuál será la población de bacterias al cabo de dos semanas suponiendo que se reproducen una vez por minuto?

e) ¿Cuál será la población de bacterias al cabo de dos semanas suponiendo que se reproducen una vez por segundo?

Presentando estos valores en una tabla, podemos observar que la cantidad de bacterias a lo largo del tiempo tiende a estabilizarse:

Tasa de reproducción	Tiempo para 2 semanas	Tasa porcentual constante semanal/Tasa de reproducción	Cantidad de bacterias al cabo del tiempo t
Semanal	2	0,05	11025
Diaria	14	0,007142857	11047,7815
Por hora	336	0,000297619	11051,5448
Por minuto	20160	4,96032E-06	11051,7064
Por segundo	1209600	8,2672E-08	11051,7091

Las situaciones anteriores pueden describirse mediante el modelo $F(t) = P_0(1+r/k)^{kt}$ donde k representa el período de tiempo tomado.

Para períodos de reproducción más rápidos, la población tiende a estabilizarse.

Si se quiere predecir el comportamiento de la población a escala de tiempo pequeño, k debe tomar valores muy muy grandes.

El modelo que toma en cuenta esta situación se lo denomina modelo exponencial continuo y tiene la siguiente expresión: $F(t)= P_0e^{rt}$

8.3 Calcular los valores de la función $u = \left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ con z ϵ N que formen una progresión geométrica cuyo primer término $z_1 = a_1 = 1$ y su razón $r = 10$, continuando hasta $a_7 = 1.000.000 = 10^6$

¿Qué se observa?

8.4 La población de una ciudad en 2005 fue de 35,4 millones de habitantes. Si la tasa de crecimiento era de 1,5% anual. Suponiendo que se mantiene constante.

8.4.1 Calcular la población diez años después, utilizando el modelo exponencial continuo.

8.4.2 Suponiendo esa misma dinámica poblacional, ¿cuántos habitantes había en 2002?

8.5 Atacando determinadas esporas bacterianas con fenol al 5%, se obtuvieron los datos de la tabla adjunta, que indican el número de bacterias sobrevivientes, por gota de una mezcla del cultivo con el desinfectante:

Tiempo (hs)	0, 5	1	2,5	3	4
Bacterias	300	220	92	68	38

8.5.1 Comprobar que la ley que rige el proceso es aproximadamente exponencial. Determinar los parámetros de la función a partir de su gráfico.

8.5.2 ¿Cuál era la cantidad inicial de esporas por gota de mezcla?

8.5.3 ¿Cuántas esporas quedan después de 2 horas de comenzada la desinfección?

8.5.4 ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que queden 10 esporas por gota?

8.6 Una colonia de hongos se reproduce de manera tal que la superficie cubierta crece exponencialmente a medida que transcurre el tiempo. A las doce horas de detectados, el área afectada es de $0{,}17mm^2$, y a los 3 días es de $1{,}35mm^2$.

8.6.1 Determinar analíticamente la función que rige este crecimiento

8.6.2 ¿En qué momento el área afectada habrá sido $0{,}82mm^2$?

8.6.3 ¿Cuál será el área cubierta después de 11 días?

Función logarítmica

Se define función logarítmica de base a, a la función inversa de la función exponencial de base a.

$$f(x) = y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x \text{ con } a \neq 1 \wedge a > 0$$

Un caso particular con base 2: $f(x) = y = log_2 x \Leftrightarrow 2^y = x$. Donde $Domf = (0, +\infty)$ $Imf = R$

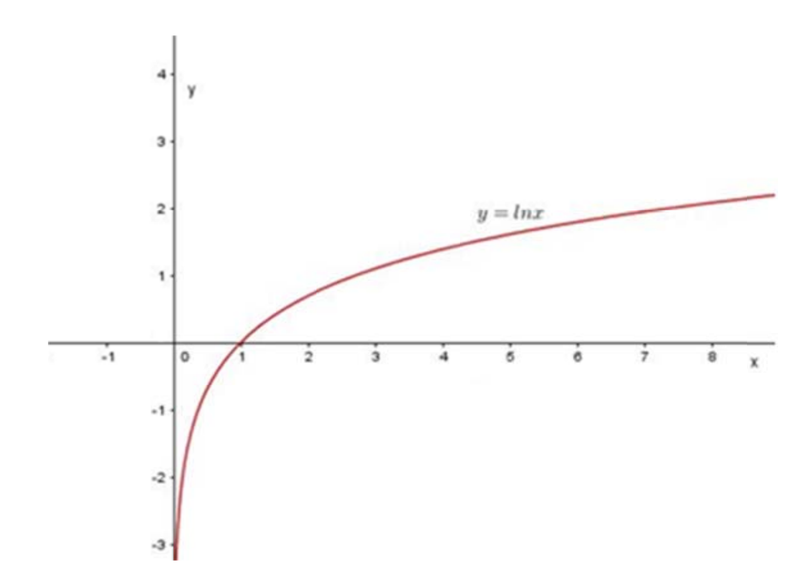
x	f(x)=$\log_2 x$
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

En la intersección con el eje x, $f(x)=0$, entonces $\log_2 x = 0 \Rightarrow 2^0 = x \Rightarrow x = 1$.

En $x=0$, hay asíntota vertical.

Un caso particular con base e: $f(x) = y = lnx \Leftrightarrow e^y = x$ (Si la base es el número e, se simboliza lnx y se llama logaritmo natural o neperiano)

$Domf = (0, +\infty) \wedge \operatorname{Im} f = R$



En la Intersección con el eje x, $f(x)=0$, entonces $\ln x = 0 \Rightarrow e^0 = x \Rightarrow x = 1$.

En x=0 hay asíntota vertical.

Actividad 9

9.1 Representar gráficamente las funciones y analizar desde la gráfica qué ocurre con las curvas obtenidas:

9.1.1 $y = 3^x$

9.1.2 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

9.1.3) $y = e^x$

9.1.4 $y = \log_3 x$

9.1.5 $y = \log x$

9.1.6 $y = \ln x$

9.2 La hipótesis de Malthus postula que la población humana crece a razón geométrica, mientras que la producción de alimentos lo hace a razón aritmética, lo que llevaría inevitablemente a una hambruna mundial. Esta hipótesis no es aceptada actualmente y ha sido sustituida por otra que supone que actúan factores represivos, que obran paulatinamente, y de tal manera, que al aumentar la población por encima de cierto tamaño tiende a disminuir la tasa de crecimiento. Este último fenómeno ha sido respaldado por los datos de las estadísticas de poblaciones humanas del último siglo en distintos países. La función que mejor describe estas situaciones de crecimiento poblacional se conoce como **función logística**, dada por la fórmula:

$$y = \frac{k}{1 + c \cdot e^{-bt}}$$

Se trata de una curva monótona creciente, que tiene la forma de una S, en la cual se prolonga la rama superior, asintóticamente a la recta horizontal de ecuación $y = k$.

9.2.1 Representar gráficamente el caso particular $y = \frac{5000}{1 + 24 \cdot e^{-0,06t}}$

9.2.2 ¿Cuál es a población inicial?

9.2.3 ¿En qué valor tiende a estabilizarse?

La función exponencial se utiliza para explicar también el decaimiento radiactivo de una sustancia en función del tiempo transcurrido.

Los átomos de ciertos elementos son inestables y se transforman en otros elementos cuyos átomos son más ligeros emitiendo distintos tipos de partículas, como las α, β y ɣ. Por ejemplo, el isótopo de radón ^{86}Rn es un elemento radioactivo. Rutherford descrubrió que si y_0 es la cantidad original de una muestra de material radiactivo, y si y(t) es la cantidad de material radiactivo presente en una muestra t horas después de iniciadas las observaciones, entonces:

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de “ley de decaimiento radiactivo” y expresa la cantidad de material radiactivo presente como función del tiempo. La constante λ, se llama constante de desintegración radioactiva del elemento.

Por ejemplo, si queremos calcular cuánto material radiactivo hay en una muestra de 10 gramos de ^{86}Rn luego de 10 días.

Para el ^{86}Rn,la constante radiactiva es λ= 0,0077 $hora^{-1}$

Consideramos como cantidad original y_0= 10, t = 240 horas

La fórmula que describe la situación es $y(t) = 10e^{-0,0077t}$. Al reemplazar t por 240, obtenemos 1,58 gramos.

Entonces, luego de 10 días en la muestra quedan 1,58 gramos de dicha sustancia.

Si tenemos una masa inicial de K_0 gramos de radio(Ra), después de transcurridos t siglos, parte de la sustancia se habrá desintegrado, quedando un cantidad remanente expresada por $f(t) = K_{0.}e^{-0,038t}$. Determinar el tiempo necesario para que se haya desintegrado la mitad de la masa inicial. Este lapso se conoce como vida media y es una constante característica de cada elemento radiactivo.

La función exponencial se utiliza también para fechar minerales y fósiles, es decir, para determinar el tiempo en el que vivieron organismos o para determinar la edad de una roca. El método de datación del carbono hizo que W. Libby obtuviera un Premio Nobel en 1960. El método consiste en tomar la proporción de carbono 14 (^{14}C) respecto al carbono 12 (^{12}C) presente en un tejido muerto. Como el ^{14}C decae en ^{12}C, esta proporción disminuye respecto a la presente en la atmósfera.

9.3 El ^{14}C, es un isótopo radioactivo del carbono cuya vida media (tiempo en que su cantidad se reduce a la mitad) es, aproximadamente de 5750 años. Si calculamos cuanto ^{14}C contienen los restos de un organismo que vivió hace mucho tiempo, es posible determinar qué porcentaje corresponde a la cantidad original cuando murió. Una vez conocida esta información, la fórmula $y = Ae^{kt}$ nos permite fechar la edad de los restos. La datación se hace después de determinar la constante k. Como la cantidad de ^{14}C después de 5750 años es A/2, tenemos que:

$$\frac{A}{2} = Ae^{5750k} \Rightarrow k = \frac{\ln 0,5}{5750}$$

Si sustituimos el valor de k en $y = Ae^{kt}$ obtenemos la siguiente fórmula con la que se calcula la cantidad de ^{14}C que queda después de t años.

$$y = Ae^{\left(\frac{\ln 0,5}{5750}\right)t}$$

9.3.1 Si se analiza el esqueleto de un animal y se ve que contiene cerca de la tercera parte de su ^{14}C original. ¿Qué edad tiene el esqueleto?

9.3.2 Se analizó una momia egipcia y se encontró que contenía 60% de su ^{14}C original. Calcular la antigüedad de la momia, con precisión de 100 años.

9.3.3 Un esqueleto de gliptodonte contiene la centésima parte de su cantidad original de ^{14}C. Calcular su antigüedad.

9.4 Al estudiar el crecimiento de una población de roedores por primera vez, se encontró que la población era de 22000. Se determinó en estudios posteriores que esta población crece en función del tiempo (expresado en años) de acuerdo a la siguiente fórmula $N = (22000)(10^{0,0163t})$.

9.4.1 ¿Cuánto tiempo pasará para que la población se duplique?

9.4.2 ¿Cuánto tardará en triplicarse?

9.5 Un cultivo bacteriano crece de acuerdo a la fórmula $y = 10000\, e^{0,6t}$, siendo t el tiempo en días. Estimar la cantidad de bacterias después de una semana.

9.6 En un cierto cultivo bacteriano, si *f*(t) bacterias se encuentran presentes a los t minutos, entonces $f(t) = Be^{0,04\,t}$. Si hay 2000 bacterias inicialmente.

9.6.1 ¿Cuántas habrá después de una hora?

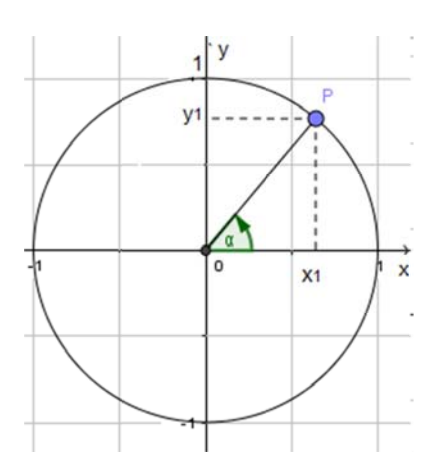
9.6.2 ¿Cuánto tiempo pasará hasta tener 36.000 bacterias en el cultivo?

Sugerimos leer del capítulo 9: "Estudios de crecimiento y desarrollo"

Funciones trigonométricas

Se denomina **circunferencia trigonométrica** a una circunferencia de radio 1 con centro en el origen de coordenadas.

La rotación de la semirrecta $\overrightarrow{op}$, con centro en el punto $(0,0)$ y ángulo de giro $\hat{\alpha}$, corta a la circunferencia en un punto $P = (x_1, y_1)$ y determina un triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ox_1 p}$.

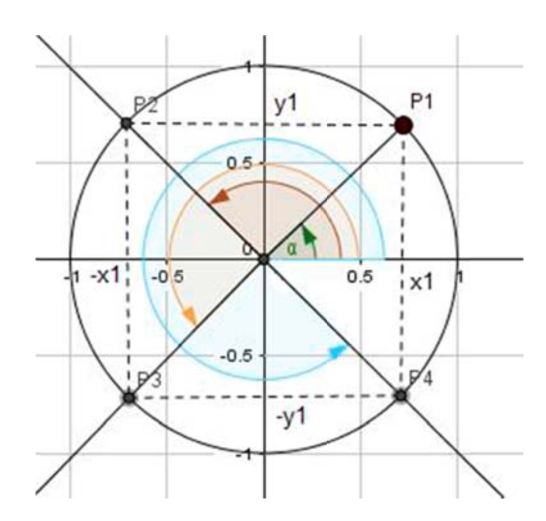


Razones Trigonométricas	Funciones definidas en la circunferencia trigonométrica
$sen\hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$sen\hat{\alpha} = \dfrac{y_1}{\overline{op}} \Rightarrow sen\hat{\alpha} = y_1$
$\cos\hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos\hat{\alpha} = \dfrac{x_1}{\overline{op}} \Rightarrow \cos\hat{\alpha} = x_1$
$tg\hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$tg\hat{\alpha} = \dfrac{y_1}{x_1}$

Positividad y negatividad de las funciones trigonométricas

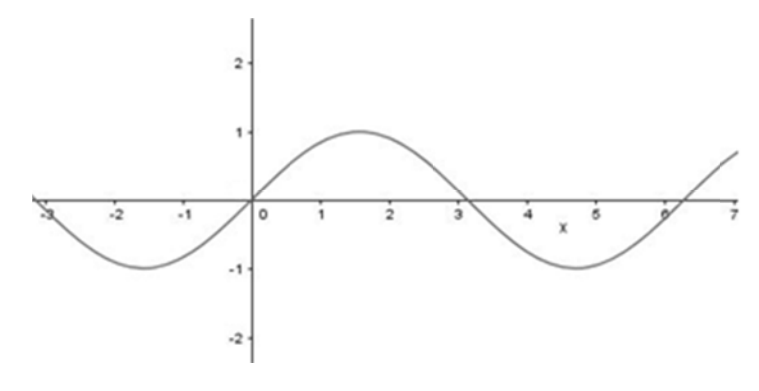
Para determinar el signo de las funciones trigonométricas se debe conocer a qué cuadrante pertenecen el ángulo y los signos de las coordenadas del punto $P=(x,y)$

Cuadrante	$sen\hat{\alpha}$	$\cos\hat{\alpha}$	$tg\hat{\alpha}$
I	+	+	+
I	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-



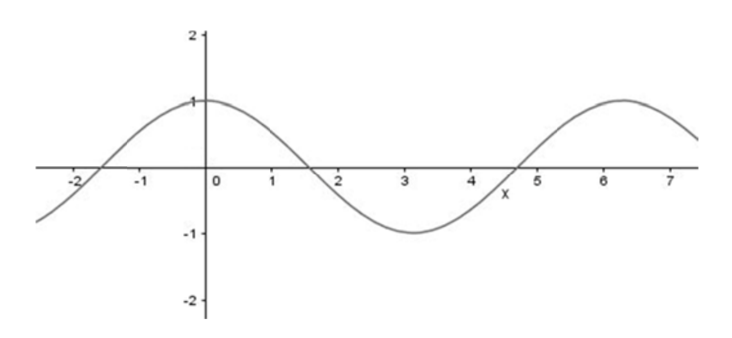
Representación gráfica de algunas funciones trigonométricas

La función seno: $f(x)=sen\ x$



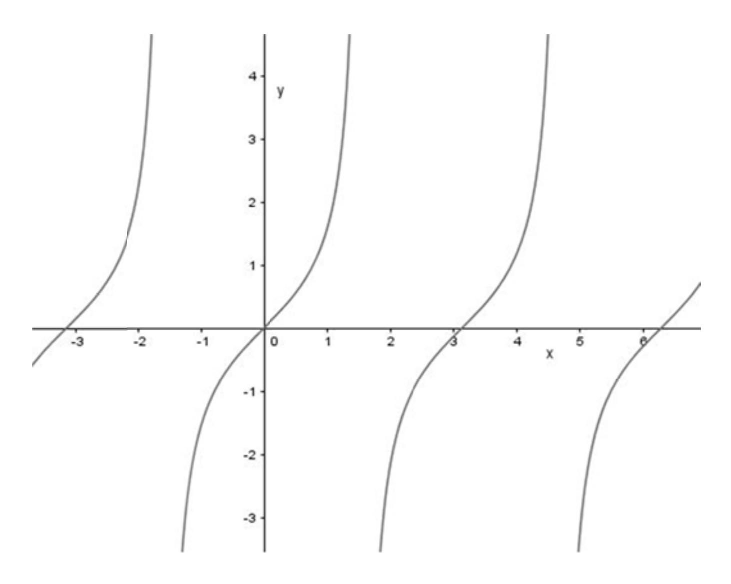
$$Dom\, f : R \wedge \operatorname{Im} f : [-1,1]$$

La función coseno: $f(x) = \cos\ x$



$$Dom\, f : R \wedge \mathrm{Im}\, f : [-1,1]$$

La función tangente: $f(x) = tg\ x$



$$Dom\, f : R - \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in z \right\} \wedge \mathrm{Im}\, f : R$$

Amplitud, período y ángulo de fase

$$f(x) = \ Asen(Bx - C) + D$$

A: modifica la amplitud de la curva

B: Modifica el período

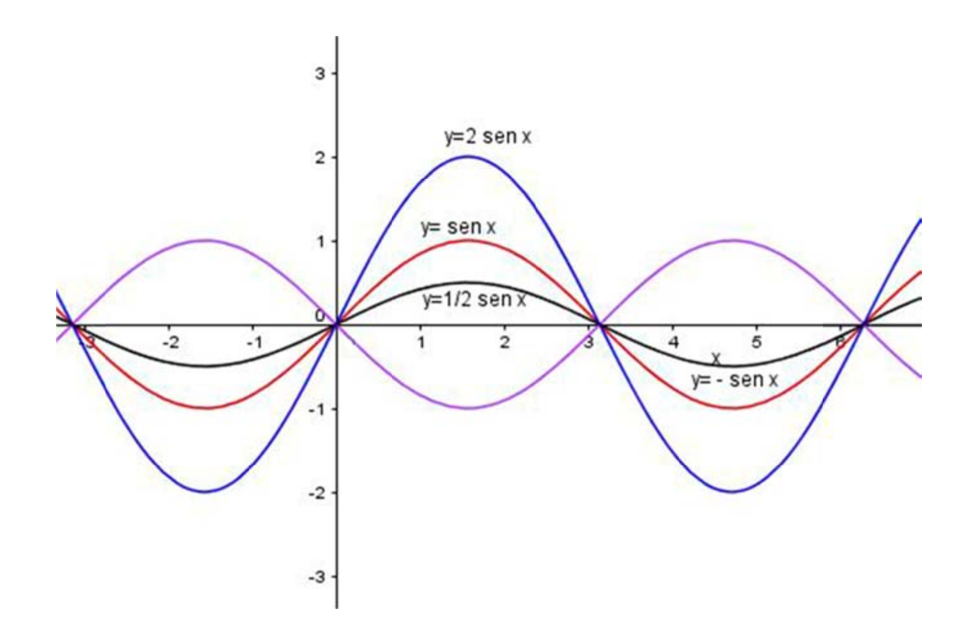
C: Desplaza la función con respecto al eje x

D: Desplaza la función con respecto al eje y

Amplitud

$|A|$: es el promedio de la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la función.

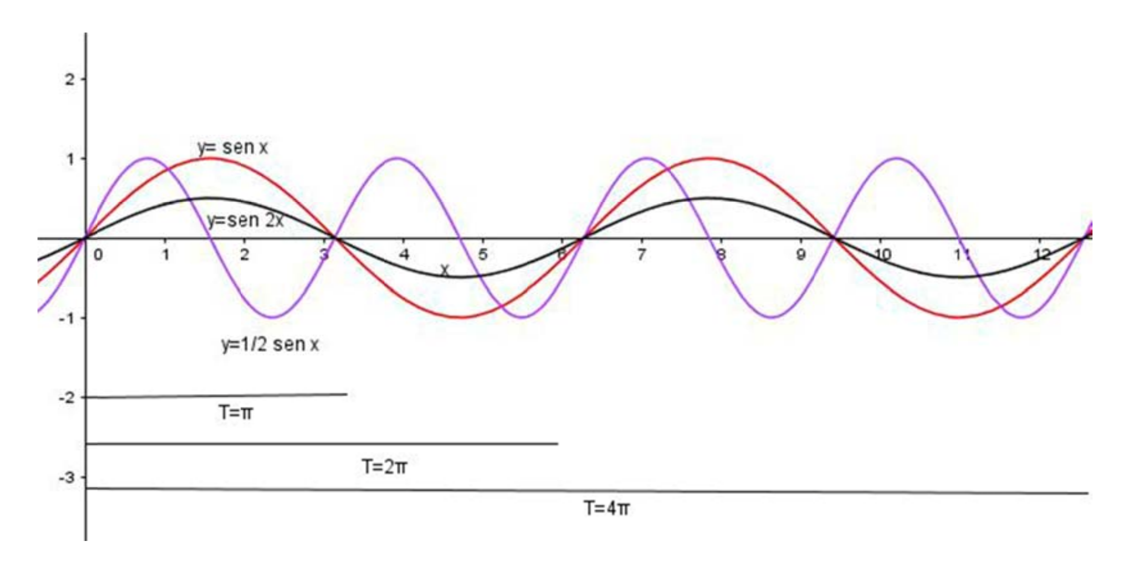
función	A	Conjunto Imagen
$f(x) = sen\ x$	1	$[-1,1]$
$f(x) = 2sen\ x$	2	$[-2,2]$
$f(x) = -sen\ x$	-1	$[-1,1]$
$f(x) = \frac{1}{2}sen\ x$	$\frac{1}{2}$	$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$



Período

B: nos dice cada cuanto se repite la porción principal de la gráfica.

	B	Período T = $\frac{2\pi}{\|B\|}$
$f(x) = sen\ x$	1	2π
$f(x) = sen\ (2x)$	2	π
$f(x) = sen\ \left(\frac{1}{2}x\right)$	$\frac{1}{2}$	4π

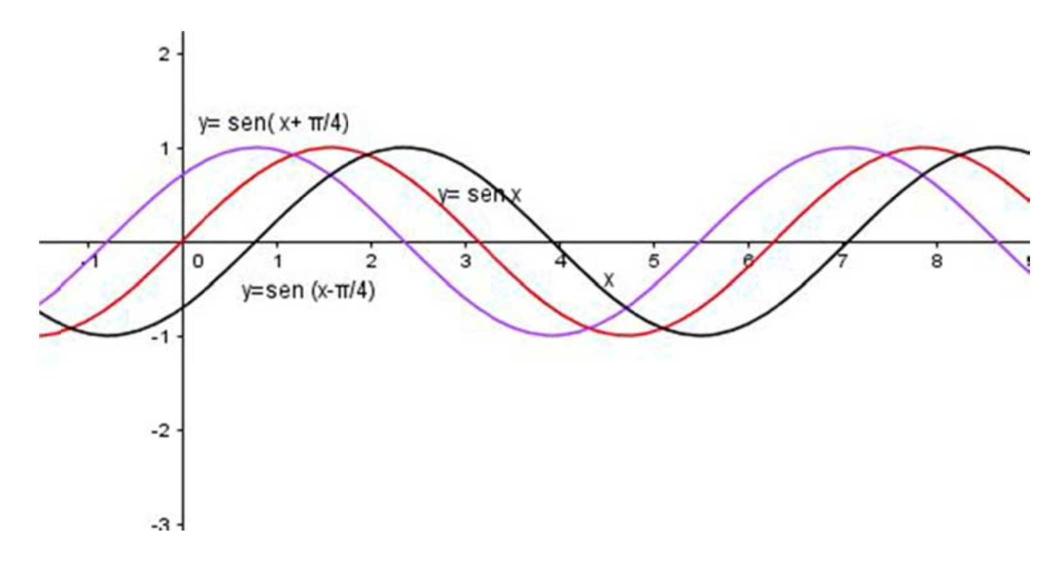


Angulo de fase

$\frac{C}{B}$: desplaza la función con respecto al eje x; si es positivo, hacia la derecha y si es negativo, hacia la izquierda.

La gráfica de la función coseno coincide con la gráfica de la función seno de x+π/2 Es decir, podemos considerar a la función coseno como una " función seno desplazada".

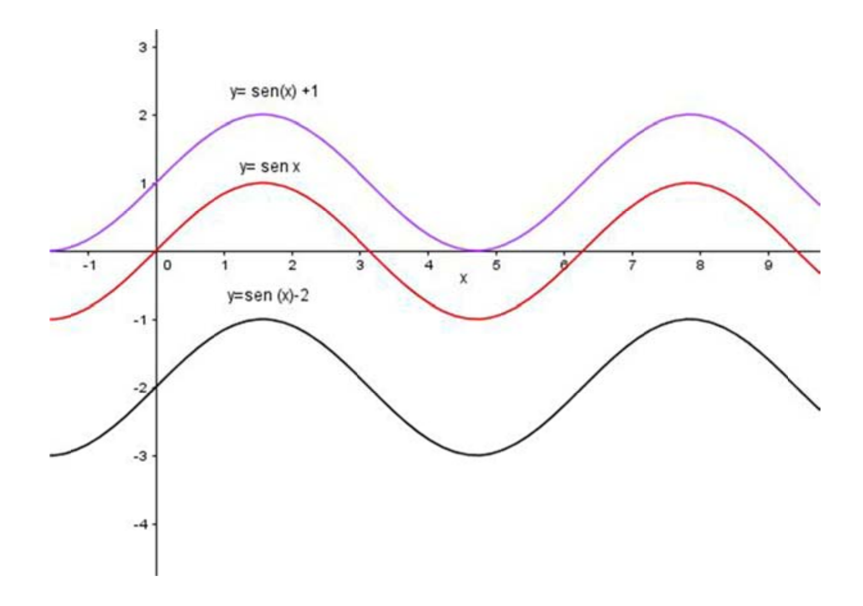
	$\frac{C}{B}$	Ángulo de fase
$f(x) = sen\ x$	0	0 no se desplaza
$f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha
$f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ hacia la izquierda



Desplazamiento respecto del eje y

D: desplaza la función respecto del eje y; si es positivo hacia arriba y si es negativo, hacia abajo.

	D	Desplazamiento
$f(x)=sen\ x$	0	0 no se desplaza
$f(x)=senx\ +\ 1$	1	1 unidad hacia arriba
$f(x)=senx-2$	-2	2 unidades hacia abajo



Actividad 10

10.1 Realizar un análisis similar al anterior para la función $f(x)=\cos\ x$

10.2 Graficar las siguientes funciones para al menos tres ciclos. Determinar su amplitud y período. Además, indicar en qué intervalos la función es creciente y en cuáles decreciente, dónde la gráfica de la función es cóncava hacia abajo y donde cóncava hacia arriba.

$10.2.1 f(x)=sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$10.2.2 f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$10.2.3 f(x)=-3sen\ 4x$

$10.2.4 f(x)=-\cos\ \frac{1}{2}x$

Sugerimos leer del capítulo 10: “Estudio de la diabetes”, donde se vincula las funciones trabajadas en este capítulo.

Bibliografía

Berio, A. y otros. Matemática 1 Activa. 1°edición. 2011. Puerto de Palos, Argentina.

Berio, A. y otros. Matemática 2 Activa. 1°edición. 2011. Puerto de Palos, Argentina.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Webgrafía

https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto

http://www.unl.edu.ar/categories/view/matematica#.Vq9PSrLhDcs

http://dle.rae.es/

http://bios.biologia.umich.mx/obligatorias/fisicomatematicas/notas_matematicas1_4marzo2014.pdf

http://personal.us.es/pmr/images/pdfs/gb-mab-apuntes.pdf

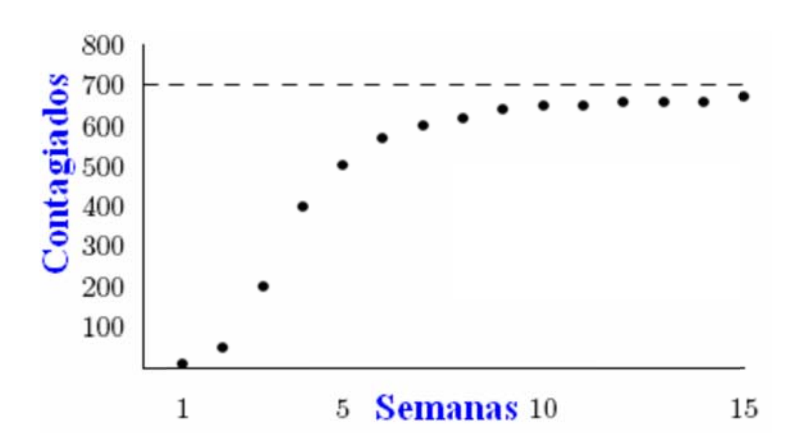
http://www.unl.edu.ar/Mis%20Cosas/Descargas/matematica_04.pdf.pdf

CAPÍTULO 3
Límites y Derivadas

Viviana Cappello

Noción intuitiva de límite

Una persona se contagia una enfermedad y entra en contacto con varias personas que a su vez se contagian y estas contagian a aquellas con las que tuvieron contacto. ¿Cuánta gente se contagiará de la enfermedad? Un inicio apropiado para responder la pregunta es recopilar datos y al graficarlos se obtiene lo siguiente[5]:

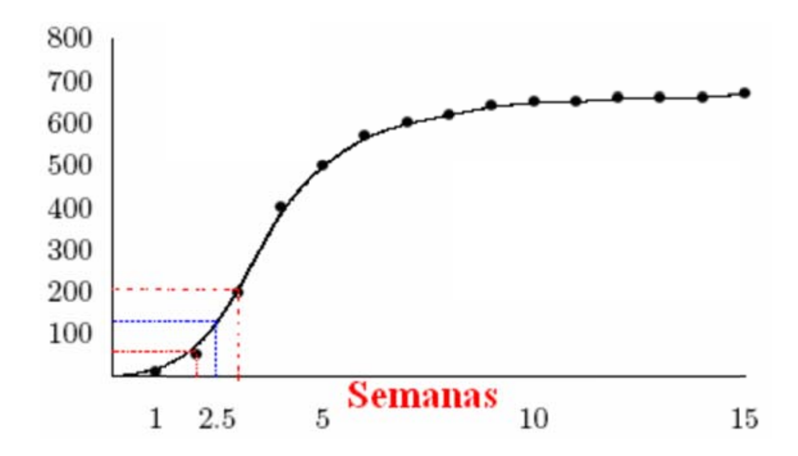


Podemos observar que a medida que transcurren las semanas, el número de contagios aumenta sin sobrepasar los 700 casos.

En símbolos, decimos que: $0 \leq y \leq 700$

Suponemos que tenemos el mismo conjunto de datos anterior, pero deseamos conocer cuánta gente se contagió el miércoles de la tercera semana. Tenemos la información exacta para el sábado de la semana 2, 50 casos, y el sábado de la semana 3, 200. ¿Qué podemos decir acerca del miércoles de la semana 3? Si hacemos la suposición de que la tasa de infección crece con una cierta regularidad, entonces el patrón de crecimiento debe obtenerse a partir de la gráfica. De hecho, podemos decir que se obtiene uniendo los puntos con una curva suave, por ejemplo, como en el gráfico de siguiente.

[5] Esto es una curva logística. El crecimiento no es exponencial porque habrá personas en la población inmunes, y otras que estén ya enfermas por lo que no se volverán a contagiar.



Como el sábado de la semana 2 había 50 contagiados; el sábado de la semana 3 había 200 contagiados y el miércoles de la semana 3 está entre esos días, es de esperar que el número de contagiados esté entre 50 y 200. Es más, podríamos estimar que sea 150.

Al analizar el comportamiento de las funciones para valores muy grandes o en la proximidad de un número, hemos utilizado expresiones como: "tiende a…", "se aproxima a …", "se acerca a ….". Este lenguaje informal hace referencia a una propiedad de las funciones que estudiaremos en lo que sigue de manera específica y desde un punto de vista más formalizado, pero sin dejar de ser intuitivos: **el límite de las funciones.**

Función dada a partir de su expresión algebraica

Si tenemos la función $f: R \to R; f(x) = x^2 - 3x$

Queremos saber cómo se comporta la función cuando x se aproxima a -1

	x	f(x)	
x tiende a -1 por izquierda	-1,01	4,0501	f(x) tiende a 4
	-1,001	4,005001	
	-1,0001	4,00050001	
	…..		
	-1	4	
	…..		
x tiende a -1 por derecha	-0,9999	3,99950001	f(x) tiende a 4
	-0,999	3,995001	
	-0,99	3,9501	

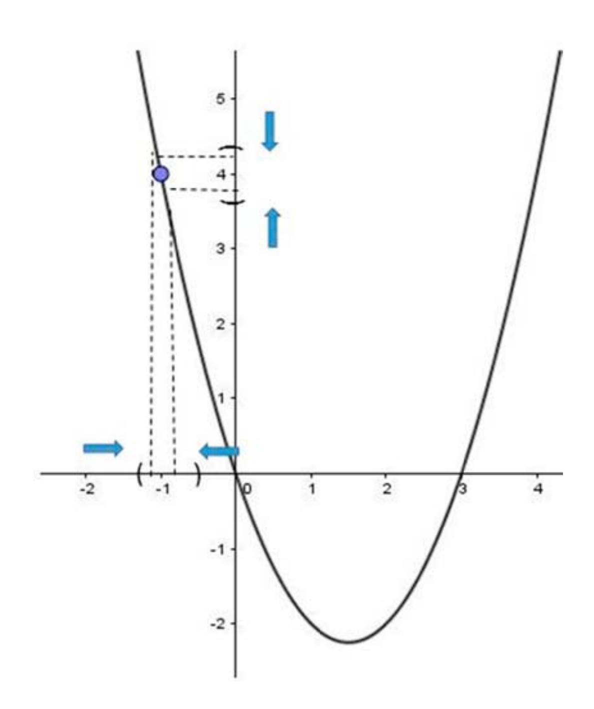
Los valores de la función están próximos a 4 para valores de x suficientemente cercanos a -1.

Simbólicamente: $\lim_{x \to -1}(x^2 - 3x) = 4$

¿Interesa el valor de la función cuando x es igual a -1?

$$f(-1) = 4$$

El valor de la función en x = - 1 coincide con el valor del límite

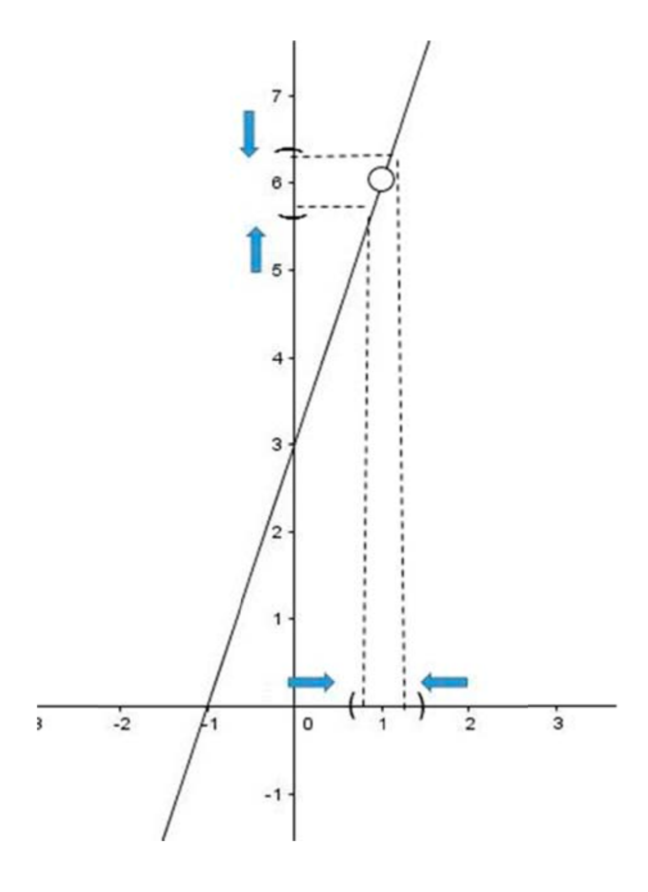


Si ahora analizamos la función: $f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}$

El dominio está dado por: $R - \{1\}$

¿A qué valor se acerca f(x) cuando x se aproxima a 1?

	x	f(x)
x se acerca a 1 por izquierda	0,9	5,7
	0,95	5,85
	0,99	5,97
	0,995	5,985
	0,999	5,997
	1	No existe
x se acerca a 1 por derecha	1,001	6,003
	1,005	6,015
	1,01	6,03
	1,05	6,15
	1,1	6,3



Simbólicamente: $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-3}{x-1} = 6$

Es decir, el límite de la función f(x) cuando x tiende a 1 es igual a 6.

La función no está definida en x=1, sin embargo, cuando x toma valores cercanos a 1 la función tiende a 6.

Definición de límite

El límite de la función f(x) cuando x tiende al número real a es igual al número L, si al aproximarse x a a por la izquierda y por la derecha, siendo x ≠ a, resulta que f(x) se aproxima o incluso es igual a L.

Escribiremos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Límites laterales

Límite por derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Expresa el valor al que se aproxima f(x) cuando x tiende a a tomando valores mayores que a (a la derecha de a).

Límite por izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Expresa el valor al que se aproxima f(x) cuando x tiende a a tomando valores menores que a (a la izquierda de a).

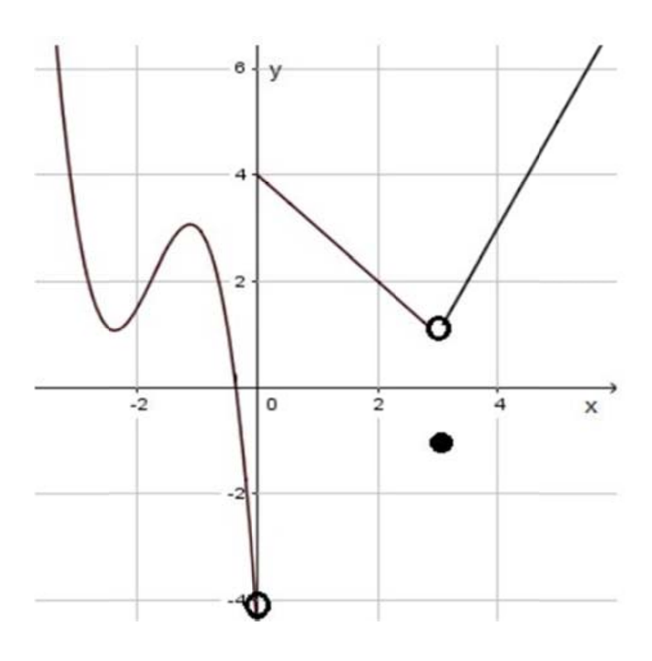
Para que exista el límite de una función, deben existir los laterales y dichos límites deben coincidir.

Teorema de Unicidad de Límite

Si una función $y = f(x)$ tiene límite en un punto dado, el mismo es **único**.

Actividad 1

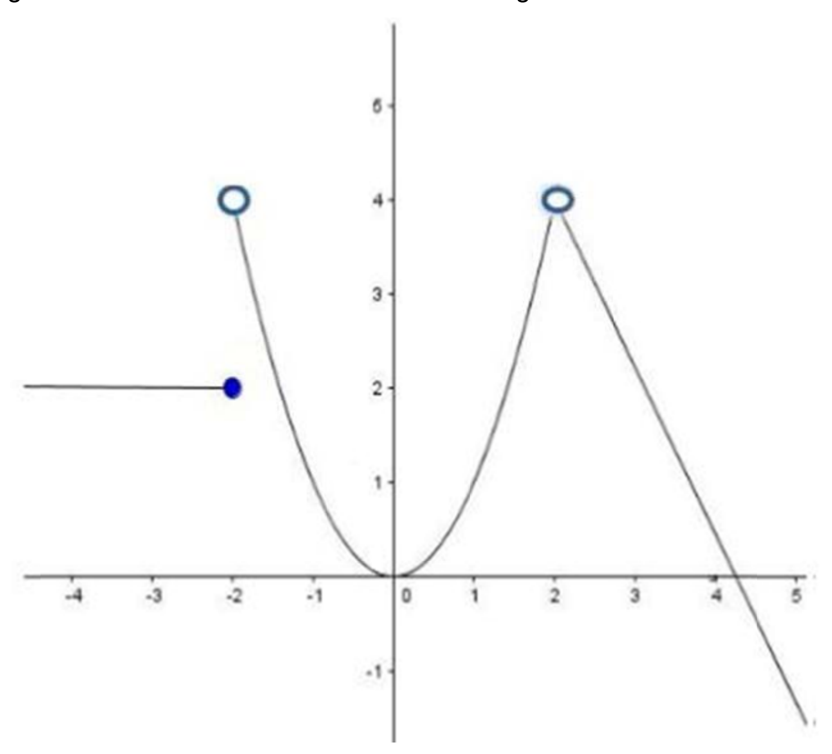
La siguiente gráfica muestra una función.



1.1. Determinar los siguientes límites:

1.1.1 $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$
1.1.2 $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$
1.1.3 $\lim_{x \to 1} f(x) =$
1.1.4.$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$
1.1.5 $\lim_{x \to 0-} f(x) =$
1.1.6 $\lim_{x \to 0} \ f(x) =$
1.1.7 $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$
1.1.8$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$
1.1.9 $\lim_{x \to -1} \ f(x) =$

1.2. En la gráfica de la función f dada encontrar los siguientes límites:

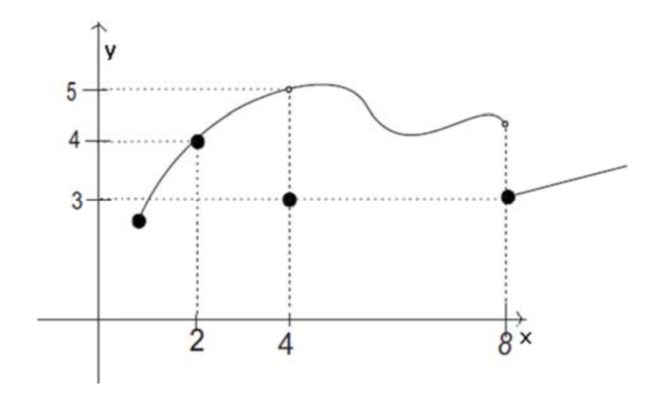


1.2.1 $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ 1.2.2 $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ 1.2.3 $\lim_{x\to 2} f(x) =$ 1.2.4 $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$

1.2.5 $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$ 1.2.6 $\lim_{x\to -2} f(x) =$ 1.2.7 $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$ 1.2.8 $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$

1.2.9 $\lim_{x\to 3} f(x) =$ 1.2.10 $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ 1.2.11 $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

1.3. Dada la función determinada por la gráfica siguiente:



Calcular los límites de la función en los puntos de abscisa $x = 2$, $x = 4$ y $x = 8$.

1.4. Analizar qué le sucede a $f(x) = x^2 + 1$ cuando x se acerca a 2.

Para ello:

1.4.1 Construir una tabla con valores de x cercanos a 2 (por derecha y por izquierda). ¿Cuánto vale $f(2)$?

1.4.2 Graficar.

1.4.3 Utilizar la notación de límite para expresar esta situación. Sacar conclusiones.

1.5. Analizar qué le sucede a f(x)= $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ cuando x se acerca a 2.

Para ello:

1.5.1 Construir una tabla con valores de x cercanos a 2 (por derecha y por izquierda). ¿Cuánto vale $f(2)$?

1.5.2 Graficar.

1.5.3 Utilizar la notación de límite para expresar esta situación. Sacar conclusiones.

1.6 Analizar qué le sucede a f(x)= $\dfrac{1}{x}$ cuando x se acerca a 0.

Para ello:

1.6.1 Construir una tabla con valores de x cercanos a 0 (por derecha y por izquierda). ¿Cuánto vale $f(0)$?

1.6.2 Graficar.

1.6.3 Utilizar la notación de límite para expresar esta situación. Sacar conclusiones.

1.7 Representar gráficamente la función y encontrar si existe el límite indicado. Justificar.

1.7.1 $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x\neq 0 \\ 5 & si \quad x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

1.7.2 $f(x)=\begin{cases} -x-1 & si \quad x\neq 0 \\ 2x+1 & si \quad x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

1.7.3 $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 1 & si \quad x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1.7.4 $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<3 \\ 10-x & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

1.7.5 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x\geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Enunciados sobre el cálculo de límites de algunas funciones particulares

Hallar los límites utilizando la definición formal excede las incumbencias del curso. Para facilitar el cálculo desarrollamos los siguientes enunciados.

1. Si f es la función identidad $f(x) = x$, entonces para cualquier valor de a se verifica que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

2. El límite de la función constante $f(x) = n$, es la misma constante, cualquiera sea el valor al que tiende:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} n = n$$

3. El límite de una función polinómica $p(x)$ es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

Los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular mediante la sustitución directa, es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Siendo a un número del dominio de la función:

- $\lim_{x \to a} senx = sena$
- $\lim_{x \to a} cosx = cosa$
- $\lim_{x \to a} tgx = tga$
- $\lim_{x \to a} \log_b x = \log_b a$
- $\lim_{x \to a} b^x = b^a$
- $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Si k ∈R y $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ entonces:

- $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = k.L_1$
- $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \to a}(f(x) \,.\, g(x) = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x) = L_1.L_2$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \; si \; \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Límites indeterminados

Cuando el resultado del límite no puede anticiparse al reemplazar la variable por el valor al cual tiende, se generan indeterminaciones del tipo $"\frac{0}{0}"$, $"\frac{\infty}{\infty}"$, $"0.\infty"$, $"\infty.\infty"$. El resultado de estos

límites no puede saberse de antemano: puede ser un número, $\infty; -\infty$; o no existir. Para calcular estos límites se realizan procedimientos algebraicos para “salvar la indeterminación”.

Indeterminación del tipo $"\frac{0}{0}"$

Algunas posibilidades:

- factorizar numerador y denominador para luego simplificar y así eliminar la indeterminación.

Por ejemplo: $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = 10$

- crear un factor común multiplicando el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que se presenta en uno de ellos.

Por ejemplo: $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = 4$

Actividad 2

2.1 Calcular los siguientes límites:

2.1.1 $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x}{x+3} =$

2.1.2 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-6x+5}{2x^2-2} =$

2.1.3 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} =$

2.1.4 $\lim_{h\to 0} \frac{3h^2+2h}{h^3+3h} =$

2.1.5 $\lim_{x\to -4} \frac{3x+12}{2x^3+128} =$

2.1.6 $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} =$

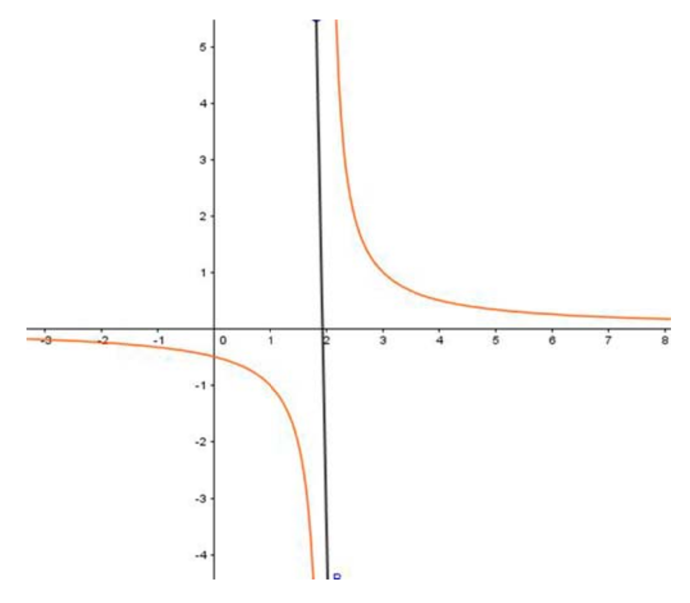
2.1.7 $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} =$

2.1.8 $\lim_{t\to 0} \frac{2-\sqrt{4-t}}{2t} =$

2.1.9 $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3+h}\right) =$

Límites en el infinito

A partir de las siguientes gráficas de funciones, indicaremos el comportamiento de las mismas cuando x va tomando valores cada vez más grandes y cuando x va tomando valores cada vez más chicos.

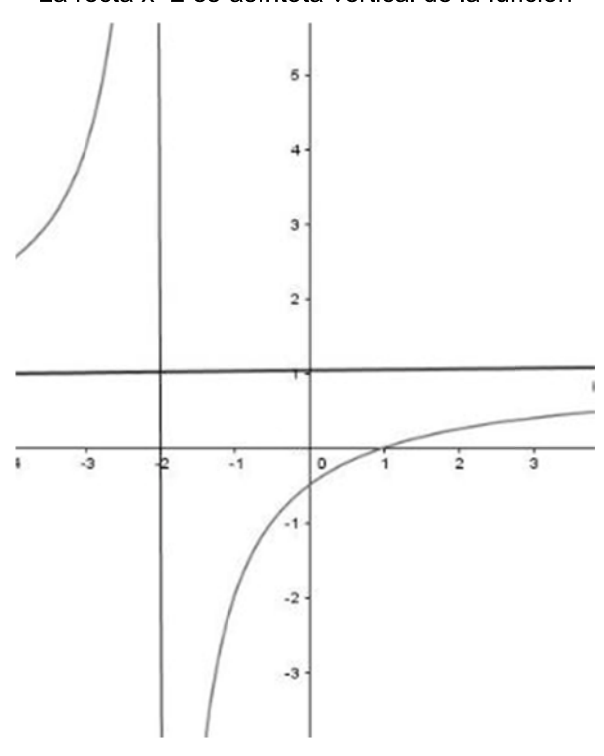


Si x crece indefinidamente, la función f(x) se acerca a 0

Si x decrece indefinidamente, la función f(x) se acerca a 0

La recta y=0 es asíntota horizontal de la función

La recta x=2 es asíntota vertical de la función

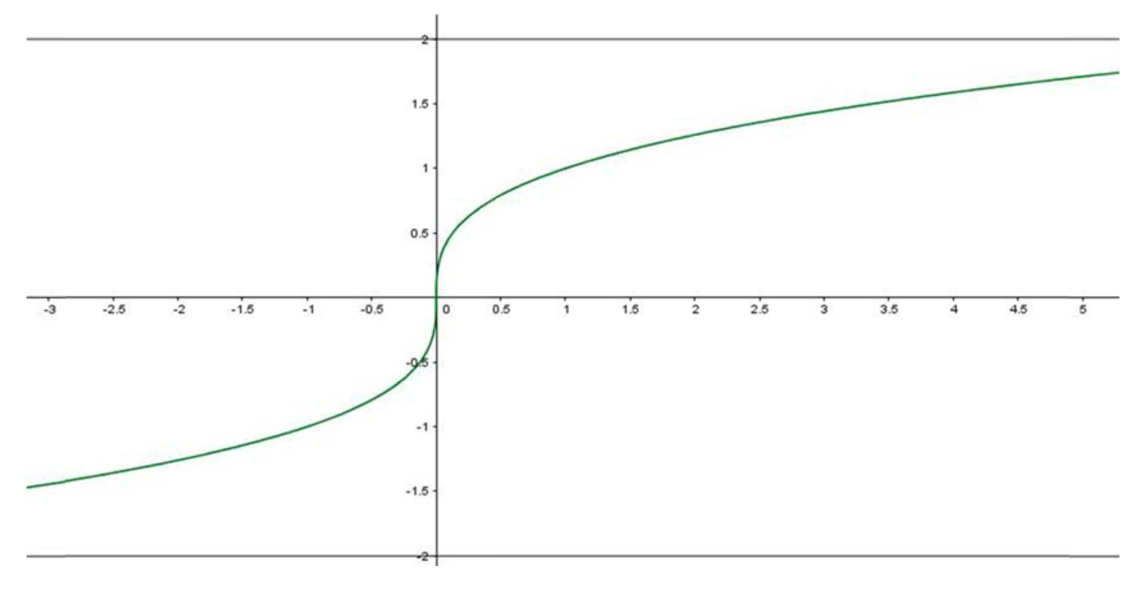


Si x crece indefinidamente, la función f(x) se acerca a 1

Si x decrece indefinidamente, la función f(x) se acerca a 1

La recta y=1 es asíntota horizontal de la función

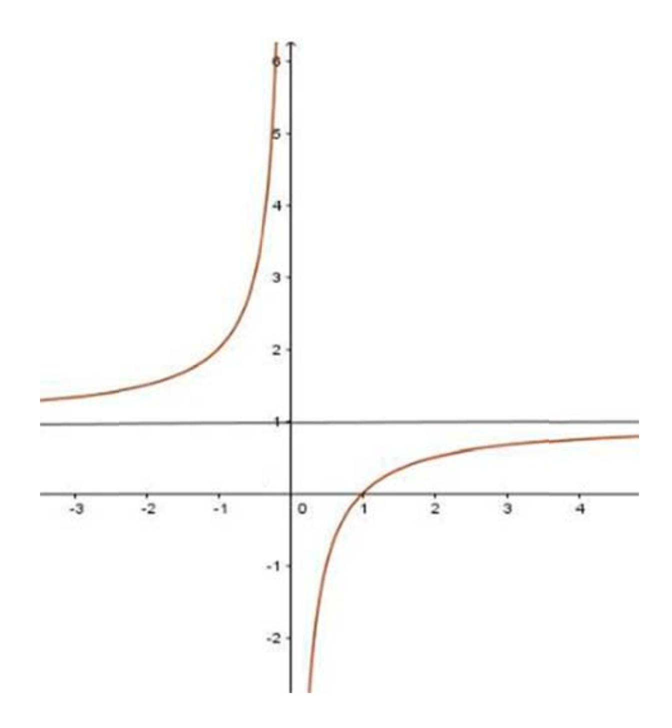
La recta x=-2 es asíntota vertical de la función



Si x crece indefinidamente, la función $f(x)$ se acerca a 2

Si x decrece indefinidamente, la función $f(x)$ se acerca a -2

Las rectas $y = 2$ e $y = -2$ son asíntotas horizontales de la función



Si x crece indefinidamente, la función $f(x)$ se acerca a 1

Si x decrece indefinidamente, la función $f(x)$ se acerca a 1

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función

La recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función

Actividad 3

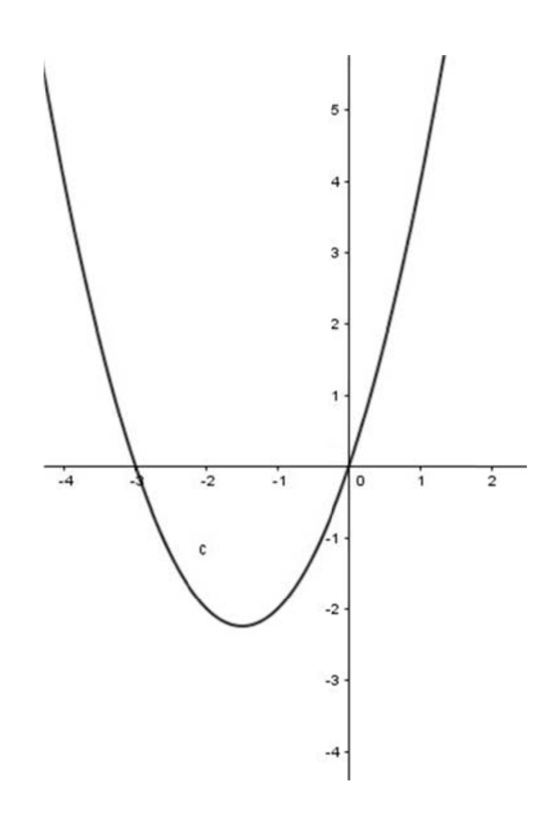
3.1 En biología pesquera, es una práctica relativamente normal, estimar el número de peces que desovan en la época reproductiva en ciertos ríos. Esta información se utiliza para predecir el número de peces reproductores o reclutas que retornarán al año siguiente para desovar. Si S es el número de peces hembra y R el número de reclutas, la función de Beverton y Holt[6] establece que $R(S)=S/(\alpha S+\beta)$ en donde α y β son constantes positivas. Demostar que esta función predice un reclutamiento más o menos constante cuando el número de hembras es lo suficientemente grande.

3.2 En el estudio del crecimiento de las poblaciones animales, se supone que el número de organismos aumenta a lo largo del tiempo siguiendo la función $N(t) = \dfrac{\kappa}{1 + \alpha \cdot e^{-\beta \cdot t}}$ donde κ, α y β son parámetros. Determinar el número de animales que predice esta función cuando el tiempo transcurrido sea lo suficientemente grande.

Límites infinitos en el infinito

En el siguiente gráfico se observa que en la función representada, a medida que x toma valores cada vez más grandes (o más chicos), la función toma valores mayores.

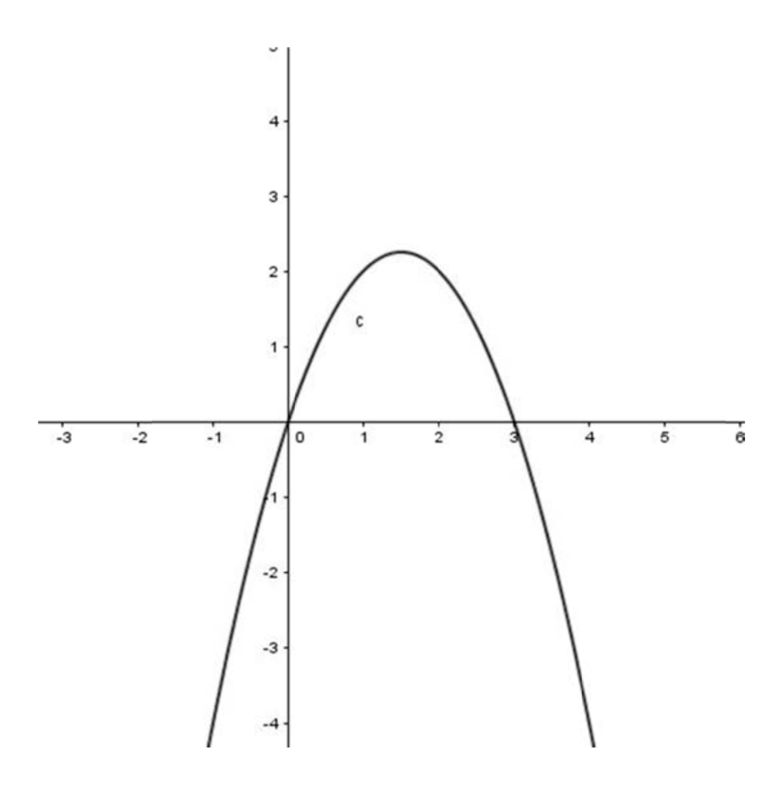
[6] La ecuación de diferencia de Beverton-Holt tiene amplias aplicaciones en crecimiento de la población



En otras palabras y en símbolos matemáticos:

$f(x)$ crece cada vez más a medida que x aumenta: Esto se expresa: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

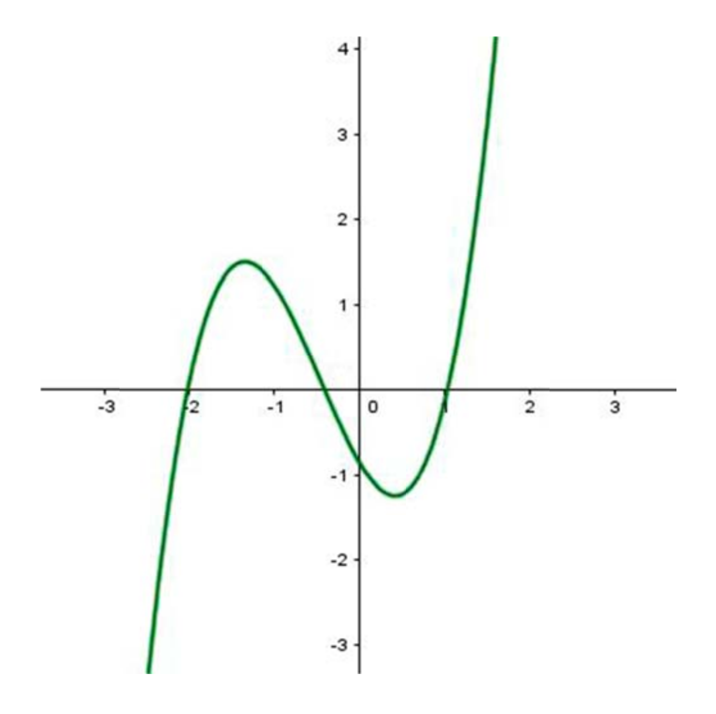
$f(x)$ crece cada vez más a medida que x disminuye: Esto se expresa: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Para este nuevo ejemplo:

$f(x)$ decrece cada vez más a medida que x aumenta: Esto se expresa: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(x)$ decrece cada vez más a medida que x disminuye: Esto se expresa: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



En este ejemplo:

$f(x)$ crece cada vez más a medida que x aumenta: Esto se expresa: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(x)$ decrece cada vez más a medida que x disminuye: Esto se expresa: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

El límite de una función polinómica en el infinito, es igual al límite del término de mayor exponente.

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ de cociente de funciones polinomiales

Se divide numerador y denominador por x^n siendo n el mayor de los exponentes de las funciones polinómicas. Luego se aplican las propiedades de los límites.

Ejemplos:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x^2+x^4-1}{x+x^3-3} = \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+x^4-2}{4x^5-3} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2+5}{x^3+3} = 0$$

Actividad 4

4.1 Calcular los siguientes límites:

4.1.1 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-3x}{4x^2+5} =$ 4.1.2 $\lim_{x\to\infty} 5-\frac{2}{x^2} =$

4.1.3 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{x^2+1} =$ 4.1.4 $\lim_{x\to\infty} \frac{8-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}} =$

4.2 La cantidad de una droga en la corriente sanguínea x horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$. Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en sangre?

4.3 La población de una colonia de bacterias (en millones) está dada por: $y = \frac{4}{2+8e^{-2x}}$.

4.3.1 ¿Cuál es la población inicial de la colonia?

4.3.2 ¿A medida que transcurre el tiempo, la población crece indefinidamente o tiende a estabilizarse?

Sugerimos leer del capítulo 10: "Estudio del crecimiento tumoral", donde se vincula los límites trabajados en este capítulo.

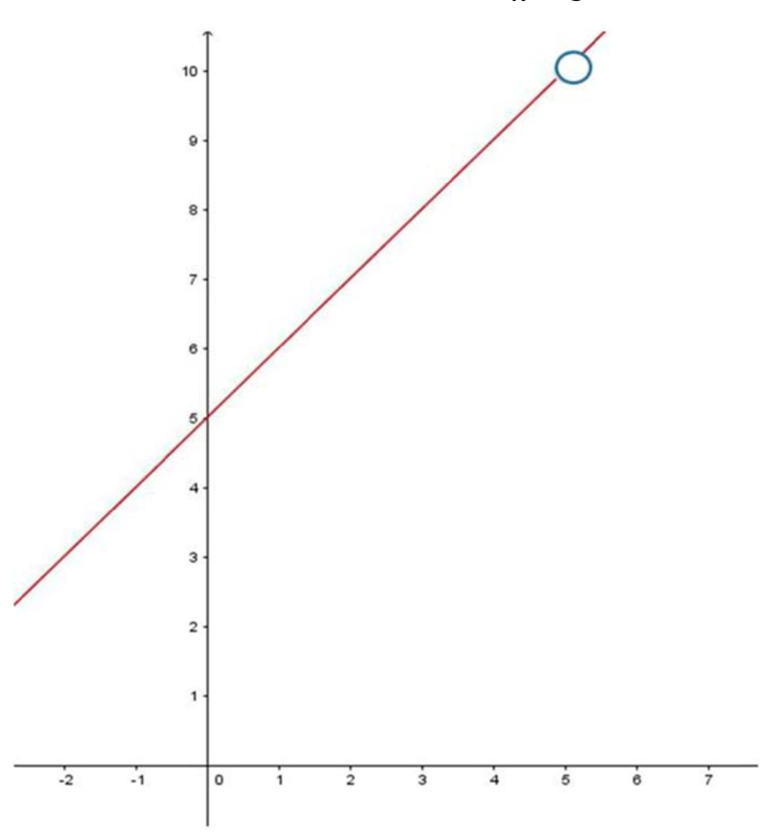
Continuidad

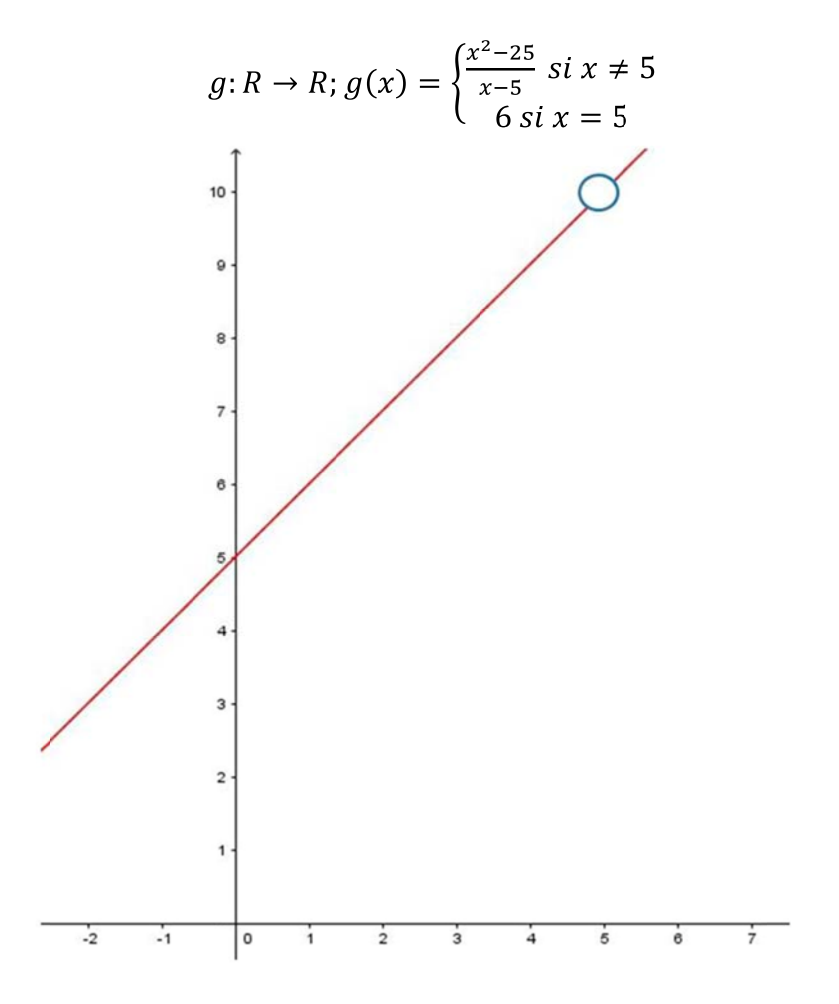
Las funciones pueden se clasificadas en continuas y discontinuas. Para que nos hagamos una idea, una función continua en todo su dominio será aquella que se pueda dibujar de un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel.

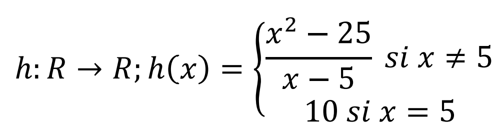
Pero muchas de las funciones van a presentar discontinuidades, o sea, van a ser continuas sólo en algunos "trozos" de su dominio.

Veamos las siguientes funciones:

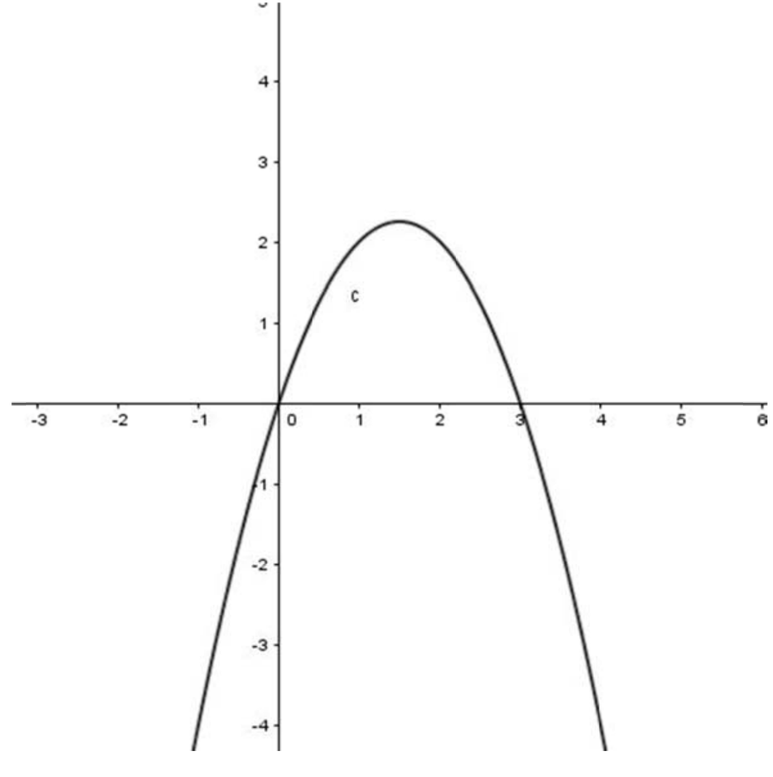
$$f: R - \{5\} \rightarrow R;\ f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$







$$h: R \to R; h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} \; si \; x \neq 5 \\ 10 \; si \; x = 5 \end{cases}$$



Decimos que una función dada por $y = f(x)$ es continua en un punto de abscisa x = a si se cumplen las siguientes condiciones:

1) La función está definida en x = a, es decir, a pertenece al dominio de la función.

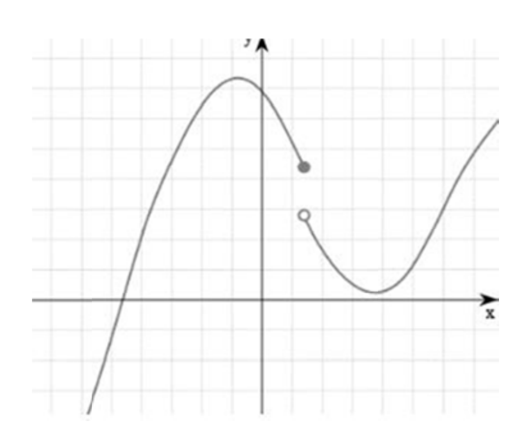
2) Existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$

3) El límite para x tendiendo a a, es igual al valor de la función en el punto: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

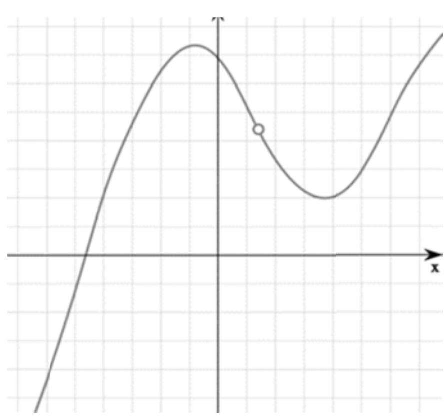
Actividad 5

Dadas las siguientes gráficas de funciones indicar si son continuas o no, en todo su dominio, y en el caso de discontinuidad explicar por qué se produce.

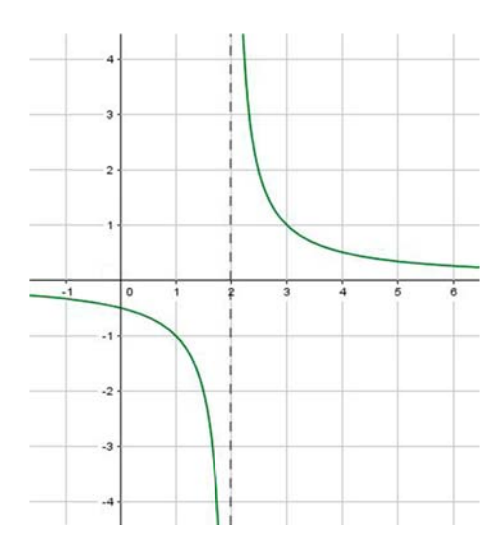
5.1



5.2



5.3



5.4 Para las siguientes funciones trazar la gráfica, luego observando donde hay saltos determinar los valores de la variable independiente en los cuales la función es discontinua e indicar por qué no se satisface la definición de continuidad.

5.4.1 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ 8 & si \quad x=3 \end{cases}$

5.4.2 $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 3 \\ 8 & si \quad x>3 \end{cases}$

5.4.3 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 4 & si \quad x=2 \end{cases}$

5.4.4 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2} & si \quad x\neq -2 \\ -3 & si \quad x=-2 \end{cases}$

5.4.5 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x\neq 1 \\ 3 & si \quad x=1 \end{cases}$

Tipos de discontinuidades

Evitables: Se da cuando existe el límite de la función en $x=a$. Puede no estar definida la función en $x=a$ o puede no coincidir con el valor del límite. La función puede modificarse adoptando como f(a) el valor del límite en $x=a$.

Se presenta cuando la gráfica se interrumpe en un punto donde no hay imagen, o la imagen está desplazada del resto de la gráfica. Aquí la tendencia de la función a la izquierda y a la derecha de $x=a$ sí coincide, sin embargo, es f(a) el valor que no coincide con dicha tendencia o que ni siquiera existe.

Esencial (inevitable)**:** no existe el límite en $x=a$.

Una discontinuidad esencial de salto finito se presenta cuando en un valor de $x=a$, se observa una separación entre dos trozos de la función. Esto es debido a que la tendencia de la función a la izquierda del punto $x=a$ es diferente de la que tiene a la derecha.

Una discontinuidad de salto infinito se presenta cuando en un punto de la curva observamos que la tendencia a la izquierda o a la derecha (o ambas) es alejarse al infinito (+∞ o -∞), entonces nos encontramos con una discontinuidad de salto al infinito en el punto de $x=a$.

Actividad 6

6.1 Demostrar que la función es discontinua en el punto x= a. Luego determinar si la discontinuidad es evitable o esencial.

6.1.1 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; $a=2$

6.1.2 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ 8 & si \quad x=3 \end{cases}$ $a=3$

El número e

Una sucesión es toda función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales [7]

En especial la sucesión $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ permite definir al número irracional e,

que se obtiene como el resultado del límite cuando n tiende a infinito: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Para tener una idea del comportamiento, cuando n crece, calcularemos valores aproximados de u_n para valores cada vez más grandes de n.

n	$1+\dfrac{1}{n}$	$u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
10	$1+\dfrac{1}{10}$	$1{,}1^{10}$ = 2,59374
100	$1+\dfrac{1}{100}$	$1{,}01^{100}$ = 2,70481
1000	$1+\dfrac{1}{1000}$	$1{,}001^{1000}$ = 2,71692
10000	$1+\dfrac{1}{10000}$	$1{,}0001^{10000}$= 2,71814
100000	$1+\dfrac{1}{100000}$	$1{,}00001^{100000}$= 2,71826
1000000	$1+\dfrac{1}{1000000}$	$1{,}000001^{1000000}$= 2,71828

Si bien hemos supuesto que n $\in$ N, en general se verifica: $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$ [8]

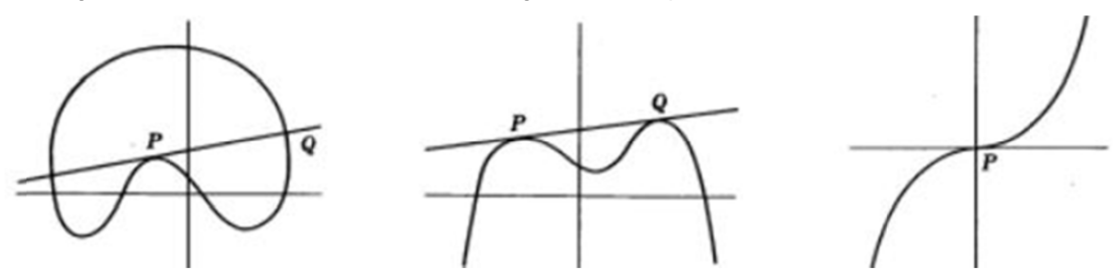
[7] Esta definición completa el concepto visto en el capítulo 1

La pendiente de una curva

Tomemos un punto P sobre una curva. Queremos definir:

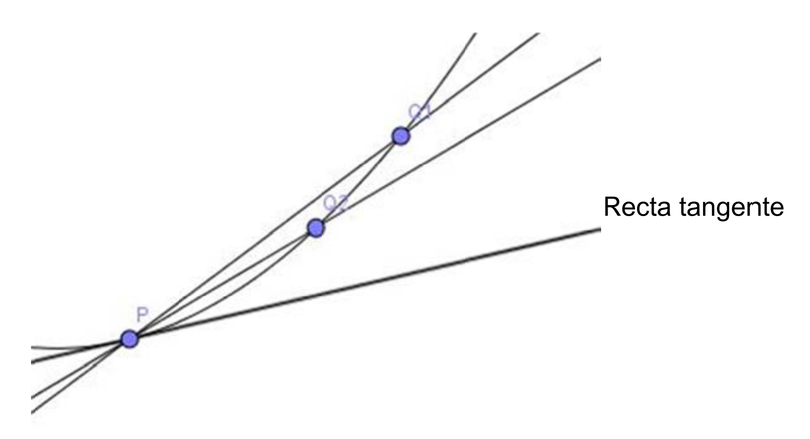
- **pendiente** de la curva en ese punto y **recta tangente** a la curva en ese punto.

Las siguientes curvas muestran la recta tangente en un punto de la curva:



¿Qué observamos en cada una de las figuras?

Para definir la pendiente de la curva en el punto P, debemos considerar lo que sucede en un punto Q que está cerca de P. Miremos la siguiente gráfica: Tomemos un punto Q_1, distinto de P, de la curva $y = f(x)$. Los dos puntos determinan una recta con pendiente que depende de P y Q_1. Si el punto Q_2 se aproxima al punto P sobre la curva, entonces cuando Q_2 llega cerca de P, la pendiente de la recta que pasa por P y Q_2 ahora debe aproximarse a la pendiente, que no conocemos, de la recta tangente, que tampoco conocemos, a la curva en P.



Si el límite de la pendiente formada por P y Q, existe cuando Q se aproxima a P, entonces debe ser considerado como la pendiente de la propia curva en P.

Dada una curva $y = f(x)$ y P un punto sobre esa curva. La pendiente de la curva en P es el límite de la pendiente de las rectas entre P y otro punto Q sobre la curva, cuando Q se aproxima a P.

Si la curva es una recta de ecuación $y = mx + b$, la pendiente entre dos puntos de la misma es m.

Por ejemplo, si la curva es $y = f(x) = x^2$, vamos a encontrar la pendiente en el punto P (2;4).

---

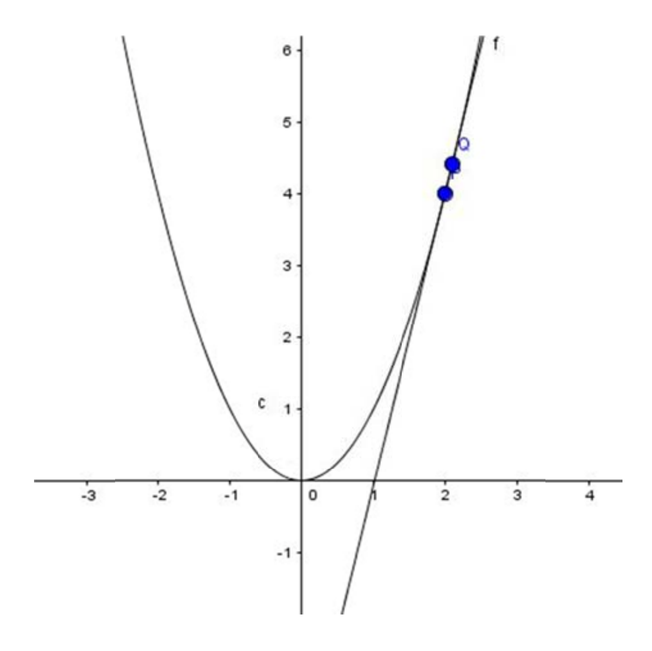
[8] El número e, de manera formal lo definimos como el límite de la sucesión $1 + 1/n$,cuando n tiende a infinito, concepto trabajado en el capítulo 2.

Para ello buscamos un punto "próximo" a P, por ejemplo $si\ x = 2{,}1 \rightarrow f(2{,}1) = (2{,}1)^2 = 4{,}41$. Es decir, la curva pasa por el punto $Q(2{,}1;\ 4{,}41)$.

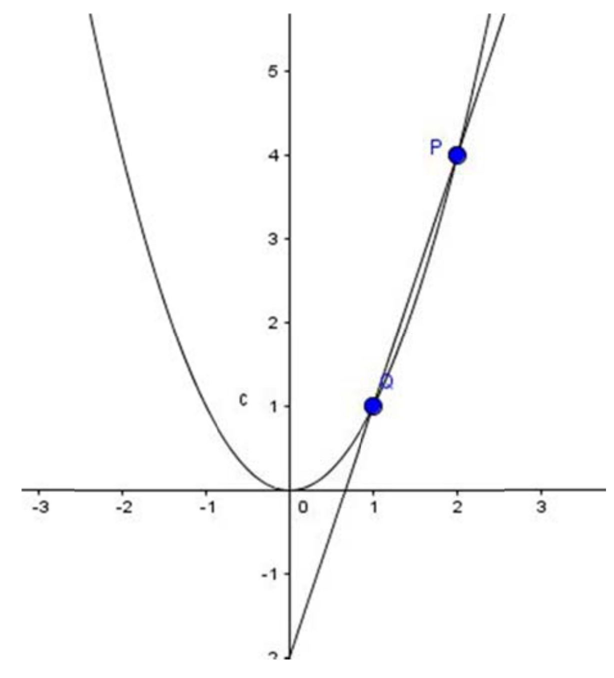
La pendiente entre estos puntos será: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4{,}41 - 4}{2{,}1 - 2} = 4{,}1$

La abscisa de un punto próximo a (2,4) puede escribirse como $2 + \Delta x$, donde Δx es un número pequeño (positivo o negativo), pero distinto de cero. Entonces: $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 = 4 + 4\Delta x + \Delta x^2$.

Es decir, el punto (2+Δx; 4+4Δx +Δx ^{2}) se encuentra sobre la curva. Si Δx es positivo, la recta que une esos puntos será:



Si Δx es negativo, entonces $2 + \Delta x$ es menor que 2, la recta que une esos puntos tendrá el siguiente aspecto:



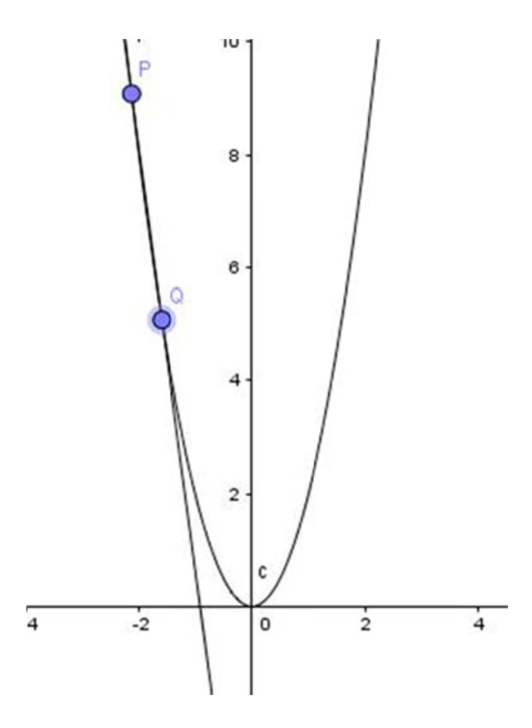
La pendiente de la recta que une los puntos $(2; 4)\ y\ (2 + \Delta x;\ 4 + 4\Delta x + \Delta x^2)$ será:

$$m = \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{2 + \Delta x - 2} = \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

Cuando el punto cuya abscisa es 2+Δx se acerca al punto (2;4), el número Δx tiende a cero. Cuando Δx se aproxima a cero, la pendiente de la recta se aproxima a 2, que es la pendiente de la curva en el punto (2;4) por definición.

Busquemos ahora la pendiente de la misma curva en otro punto, por ejemplo (-3;9).

Tomamos un punto cercano $(-3 + \Delta x;\ 9 - 6\Delta x + \Delta x^2)$



La pendiente será: = $-6 + \Delta x$

Cuando Δx se aproxima a 0, la pendiente de la curva en ese punto se aproxima a -6

¿Hay una sola recta tangente a una curva?

Actividad 7

7.1 Hallar las pendientes de las siguientes curvas en los puntos indicados.

7.1.1 $y = x^2$ en el punto (-2;4)

7.1.2 $y = 3x - 1$ en el punto (1;2)

7.1.3 $y = x^3$ en el punto (1;1)

La derivada

Siguiendo con el ejemplo de $y = f(x) = x^2$, tomamos un punto cualquiera de la curva, $(x;\ f(x)) \rightarrow (x;\ x^2)$. Tomamos un punto cercano de abscisa x+Δx para Δx pequeño (distinto de cero). La ordenada de ese punto será:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

La pendiente de la recta será: $m = \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{x+\Delta x-x} = \frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x+\Delta x$

Cuando Δx tiende a cero, 2x+Δx se aproxima a 2x.

En particular cuando x=1, la pendiente será 2. Cuando x sea 3 la pendiente será 6. Y así, a partir de la expresión encontrada podemos decir cuánto será la pendiente para cualquier valor de x.

En forma general para cualquier función f(x), formamos el cociente:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$, llamado cociente de Newton

Este cociente es la pendiente de la recta entre los puntos $(x, f(x))\ y\ (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. El límite cuando Δx se aproxima a 0, se llama derivada de f de x, y se dice que f es derivable en x. Esto se expresa así:

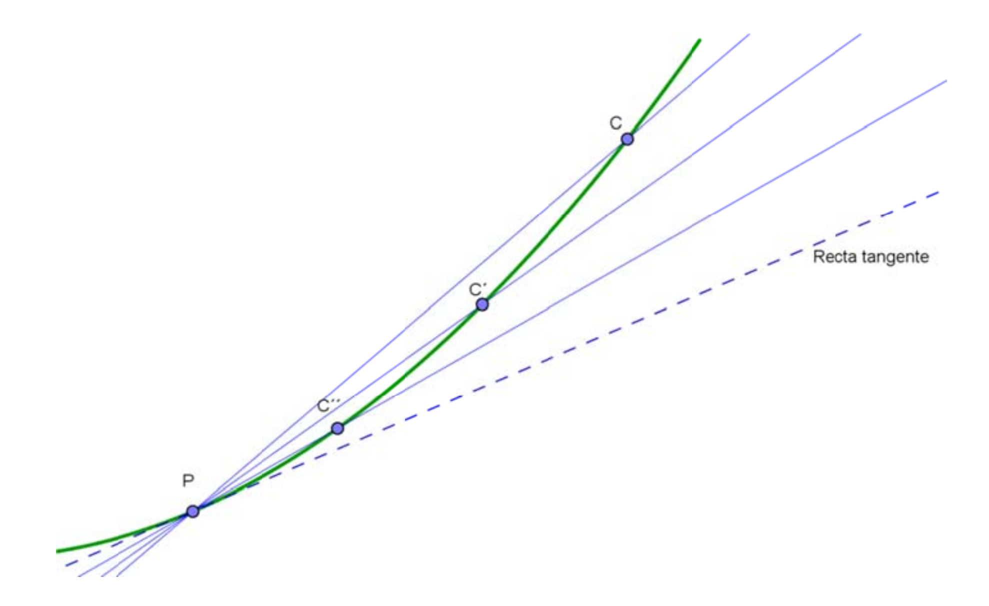
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Una función f es derivable cuando lo es en todos los puntos en que está definida. Siguiendo con la función f(x)=x^2, su derivada es 2x.

Otra forma de expresar la función derivada: $f'(x) = \frac{df}{dx}$

Interpretación geométrica de la derivada

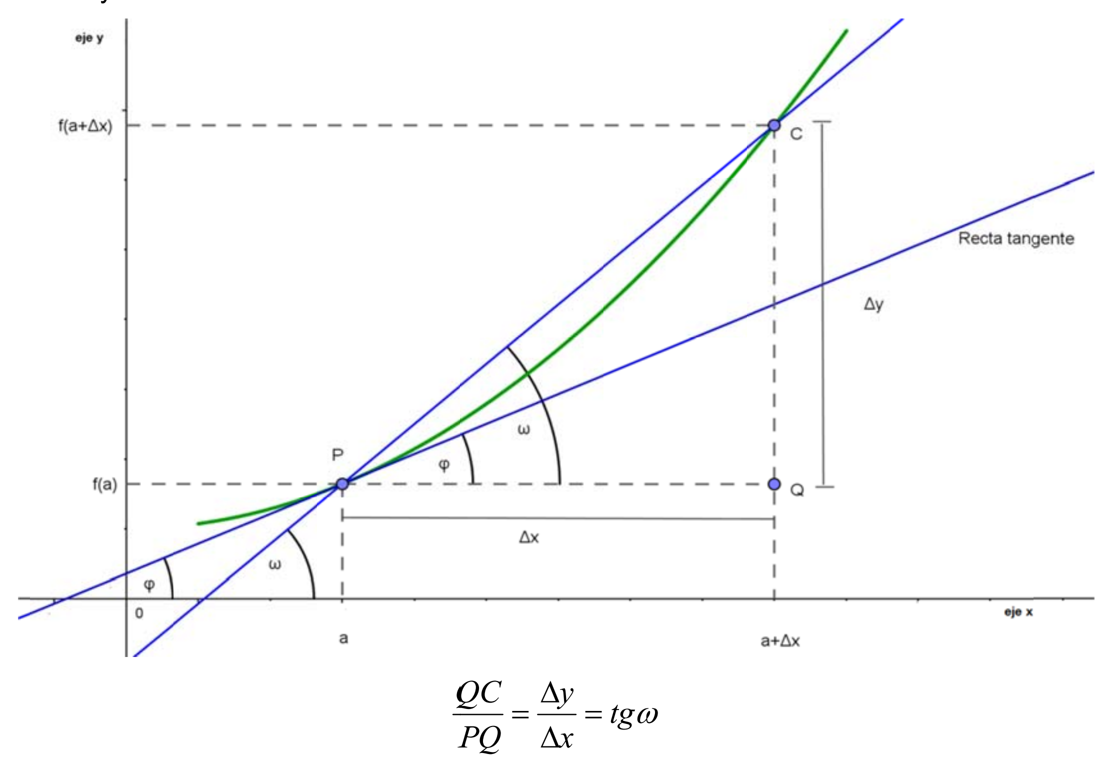
En la figura hemos trazado una curva y una secante a la misma que pasa por los puntos P y C.



Si dejamos fijo P y tomamos nuevas ubicaciones para C de modo que C', C", etc., recorran la curva acercándose cada vez más a P, vemos que las sucesivas secantes que pasan por PC',

PC", etc., se aproximan a una posición límite que es la que definimos como recta tangente a la curva en P.

En el siguiente gráfico, con el triángulo PQC, podemos determinar la pendiente de la recta que une P y C.



$$\frac{QC}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\omega$$

por lo tanto, la derivada en el punto P es: $f'(\mathrm{a}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\omega$;

pero cuando $\Delta x \to 0$, C recorre la curva acercándose a P de modo que las secantes se aproximan a la recta tangente y si φ es la inclinación de ésta última entonces $\omega \to \varphi$.

Es decir:

$$f'(\mathrm{a}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{C \to P} tg\omega = \lim_{\omega \to \varphi} tg\omega = tg\varphi \;;$$

luego, la derivada en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente en el punto considerado.

Actividad 8

8.1 Calcular la derivada de $f(x) = 3x - 1$

8.2 Hallar la derivada de $f(x) = 3x^2 + 3$. Expresar la recta tangente que pasa por el punto (1;6)

8.3 ¿Cuál será la derivada de la función f(x)=$|x|$?

Análisis físico de la derivada

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" y, con otra variable "independiente" x, que suele escribirse de la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a, a

otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La razón de cambio promedio de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[a, x]$ es:

Razón de cambio promedio $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Con frecuencia nos interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "razón de cambio puntual de $y = f(x)$ con respecto a x en el punto de abscisa a" como:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

El ejemplo más conocido, es el de un móvil que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea $s(t)$ la posición del móvil en el tiempo t, la razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural:

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

Es la velocidad media del móvil en el intervalo de tiempo comprendido entre a y $a + h$. Parece intuitivo que, en cada instante, el móvil se mueve con una determinada velocidad instantánea. Pero no hay manera de medir directamente una velocidad instantánea; un instante quiere decir una posición en la recta: la velocidad instantánea del móvil para $t = a$ es la velocidad que tiene cuando está en la posición $s(a)$. La velocidad instantánea es una abstracción de una característica física del movimiento, pero no es una magnitud que podamos observar directamente. La definición de velocidad instantánea es la razón de cambio puntual.

$$\lim_{a\to h} \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

Veamos un ejemplo: ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

Sea r el radio del cilindro y h la altura medidos en decímetros. Sea V(t) el volumen de agua, medido en litros (dcm^3), que hay en el cilindro en el tiempo t, medido en minutos. La información que nos dan es una tasa de variación

$$V(t+1) - V(t) = -3000 \text{ litros por minuto}$$

En este tipo de situación la tasa de variación se interpreta como una derivada:

$$V`(t) = -3000$$

Observamos que $V(t+t_0)-V(t) \cong V`(t_0)$. El signo negativo de la derivada es obligado ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante pero la altura del agua depende del tiempo, tenemos:

$$V(t)=\pi\, r^2\, h(t)$$

y deducimos:

$$V`(t) = -3000 = \pi\, r^2\, h(t)$$

Por lo tanto:

$$h(t) = \frac{-3000}{\pi\, r^2} \text{ decímetros por minuto}$$

Lo que realmente hemos calculado es:

$$V(t+1)-V(t) = \pi r^2(h(t+1)-h(t)) \rightarrow h(t+1)-h(t) = \frac{V(t+1)-V(t)}{\pi r^2} = \frac{-3000}{\pi r^2}$$

que es la tasa de variación de la altura en un intervalo de 1 minuto. Pero, en esta situación se identifica la tasa de variación con una derivada, lo cual es una aproximación.

Reglas de derivación

- Sea $f(x) = c$, donde $c \in R$;

$$f'(x) = 0$$

"La derivada de la función constante es cero"

- Sea $f(x) = u(x) \pm v(x)$, donde $u = u(x)\ y\ v = v(x)$ son funciones derivables.

$$f'(x) = u' \pm v'$$

"La derivada de una suma o diferencia de funciones derivables es la suma o diferencia de sus derivadas." Esta regla se puede extender fácilmente a un número finito de funciones.

- Derivada de la función potencial

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1} \text{ con } n \in R$$

- Derivada del producto de funciones

Sea $f(x) = u(x).v(x)$, donde $u = u(x)\ y\ v = v(x)$ son funciones derivables.

$$f'(x) = (u.v)' = u'.v + u.v'$$

"La derivada del producto de funciones es la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda"

- Derivada del producto de una constante por una función

$$(k.f(x))' = (k)'.f(x) + k(f(x))' = 0.f(x) + k f'(x) = k\ f'(x)$$

"La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función."

- Derivada del cociente de dos funciones (con denominador no nulo)

  Sea $f(x) = u(x) / v(x)$, donde $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones derivables.

$$f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

"La derivada del cociente de funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar, menos la primera sin derivar por la derivada de la segunda; todo sobre la segunda elevada al cuadrado"

- Derivada de la función logarítmica

$$f(x) = \log_a x\,;\ f'(x) = \frac{1}{x\ ln\ a}$$

- Derivada de la función exponencial

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x.lna$$

- Derivada de las funciones trigonométricas

$$f(x) = senx \quad f'(x) = cosx$$

$$f(x) = cosx \quad f'(x) = -senx$$

$$f(x) = tgx \quad f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$$

Actividad 9

9.1 Derivar las siguientes funciones:

9.1.1 $y = 3x^3 + 5x - 2$

9.1.2 $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{x}$

9.1.3 $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

9.1.4 $y = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{4}{3}$

9.1.5 $y = 3\pi^x + x^3 + e^x$

9.1.6 $y = \frac{sen(x)}{2} + 5 \cdot \ln(x)$

9.1.7 $y = x^4 \cdot e^x$

9.1.8 $y = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$

9.1.9 $y=\frac{\sqrt{x}+x^2}{x^3+1}$

9.1.10 $y=\cos(x)\cdot sen(x)$

- Derivada de la función compuesta

Una función compuesta es aquella en donde la variable independiente no es x, sino que es otra función.

Expresamos en general:

$y=f[g(x)]$ donde $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables.

$$y'=f'(u).g'(x)=f'(u).u'$$

9.2 Derivar las siguientes funciones compuestas:

9.2.1 $y=sen(x^3)$

9.2.2 $y=sen^2(x)$

9.2.3 $y=\cos(\ln(x))$

9.2.4 $y=tg(\sqrt{sen(x)})$

9.2.5 $y=\sqrt{\ln(x)}$

9.2.6 $y=\ln(\sqrt{x^2+1})$

9.2.7 $y=\left(\frac{x}{1+x^3}\right)^4$

9.2.8 $y=x^2\cdot e^{2x}+e^{-2x^2}$

9.2.9 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\ln(x)$

Tabla de derivadas

Funciones elementales		Funciones compuestas	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(u)\ con\ u=u(x)$	$f'(x)=f'(u).u'(x)$
$f(x)=k$	$f'(x)=0$		
$f(x)=x$	$f'(x)=1$		
$f(x)=x^p\quad p\in R$	$f'(x)=px^{p-1}$	$f(u)=u^p\quad p\in R$	$f'(u)=pu^{p-1}u'$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln u$	$f'(x)=\frac{u'}{u}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$	$f(x)=\log_a u$	$f'(x)=\frac{u'}{u\ln a}$
$f(x)=e^x$	$f(x)=e^x$	$f(u)=e^u$	$f'(u)=e^u u'$
$f(x)=a^x$	$f(x)=a^x\ln a$	$f(u)=a^u$	$f'(u)=a^u\ln a\, u'$
$f(x)=g(x)^{h(x)}$	$f(x)=h(x)\,g(x)^{h(x)-1}g'(x)+g(x)^{h(x)}\ln g(x)\,h'(x)$		
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{sen} u$	$f'(x)=\cos u\, u'$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$	$f(x)=\cos u$	$f'(x)=-\operatorname{sen} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$	$f(x)=\operatorname{tg} u$	$f'(x)=\frac{u'}{\cos^2 u}=(1+\operatorname{tg}^2 u)\,u'$

Bibliografía

Apostol, T. (1957). Mathematical analysis. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co.Ayres, F., Mendelson, E. and Ayres, F. (1999). Schaum's outline of calculus. New York: McGraw-Hill.

Courant, R., John, F. and Courant, R. (1965). Introduction to calculus and analysis. New York: Interscience Publishers.

Cuéllar, C. Juan Antonio. (2014). Matemáticas V: Cálculo Diferencial. México McGrawHill.

Díaz Gomez, J (2005) Límites y Continuidad. Problemas Resueltos. Universidad de Sonora

Engler, A (2007). El cálculo diferencial 2da edición. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fé Ediciones UNL.

Guzmán, M. and Colera, J. (1993). Selectividad, Matemáticas II. Madrid: Anaya.

Hadeler, K. (1982). Matemáticas para Biólogos. Barcelona [etc.]: Reverté.

Lang, S. (1987). Calculus of several variables. New York: Springer.

Larson R., Hostetler R. y Edwards B. (2006) Cálculo I. Octava edición México, McGraw- Hill.

Leithold, L. (1994). Matemáticas previas al cálculo. México: Oxford University Press.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Rey Pastor, J., Trejo, C. and Pi Calleja, P. (1952). Análisis Matemático. Buenos Aires: Editorial Kapelusz

Stewart James. (2008). Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición. México Cengage Learning.

Spiegel, M. and Moyer, R. (2000). Álgebra superior (3a. ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Webgrafía

http://personal.us.es/pmr/images/pdfs/gb-mab-apuntes.pdf

http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/experiencias/experiencias_AN_0506/derivadas/aplicaciones_derivada.doc

http://docplayer.es/14787959-Capitulo-3-aplicaciones-de-la-derivada-licda-elsie-hernandez-saborio-instituto-tecnologico-de-costa-rica-escuela-de-matematica.html

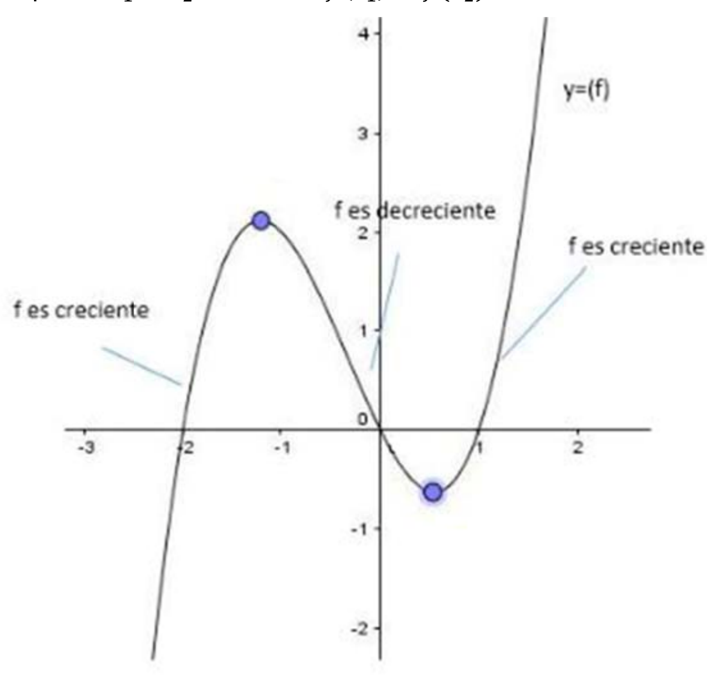
CAPÍTULO 4
Aplicaciones de la Derivada

Viviana Cappello

Crecimiento y decrecimiento de una función

Los términos creciente y decreciente permiten describir el comportamiento de una función cuando se la analiza de izquierda a derecha a lo largo de su gráfica.

- Una función f es **creciente** en un intervalo si para dos valores cualquiera x_1 y x_2 del dominio, se verifica que: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$
- Una función f es **decreciente** en un intervalo si para dos valores cualquiera x_1 y x_2 del dominio, se verifica que: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$



f crece en (-∞;-1,21) y (½; +∞)

f decrece en (-1,21;½)

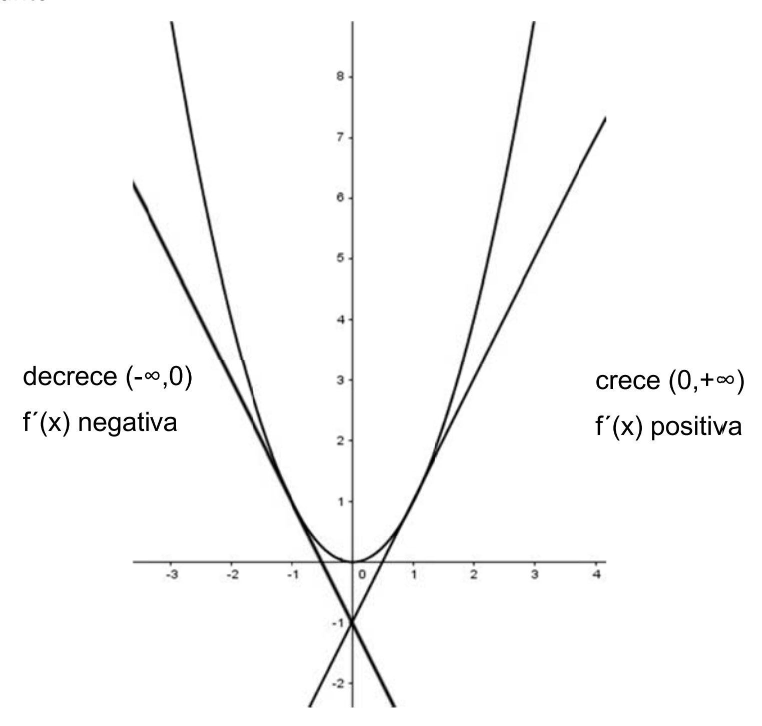
Observamos la imagen de la función para saber si crece o decrece, pero anotamos valores del dominio.

Relación del crecimiento de la función con la derivada

Sabemos que $f'(x)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x;\ f(x))$. Sabíamos de rectas, que si la pendiente es positiva, la función es creciente y si la pendiente es negativa la función es decreciente. Entonces una derivada positiva para todo x del intervalo analizado implica que la pendiente de la recta tangente en cada punto de ese intervalo es positiva; y una derivada negativa, que la pendiente es negativa.

Podemos decir que si la derivada de una función es positiva entonces la función crece, si la derivada es negativa, la función decrece. Un poco más formal decimos:

Si una función f es derivable en un punto de abscisa $x = a$, y $f'(a) > 0$ entonces f es creciente en el punto.



Si f es derivable en un intervalo I y $f' > 0$ en ese intervalo, entonces f crece en I.

El recíproco no se cumple en general; por ejemplo: la función $y = x^3$ cumple que es creciente en todo su dominio, y sin embargo $f'(0) = 0$.

Análogamente si f es derivable en un punto de abscisa $x = a$ y $f'(a) < 0$ entonces f es decreciente en a.

Si $f' < 0$ en todo un intervalo I, f es decreciente en I.

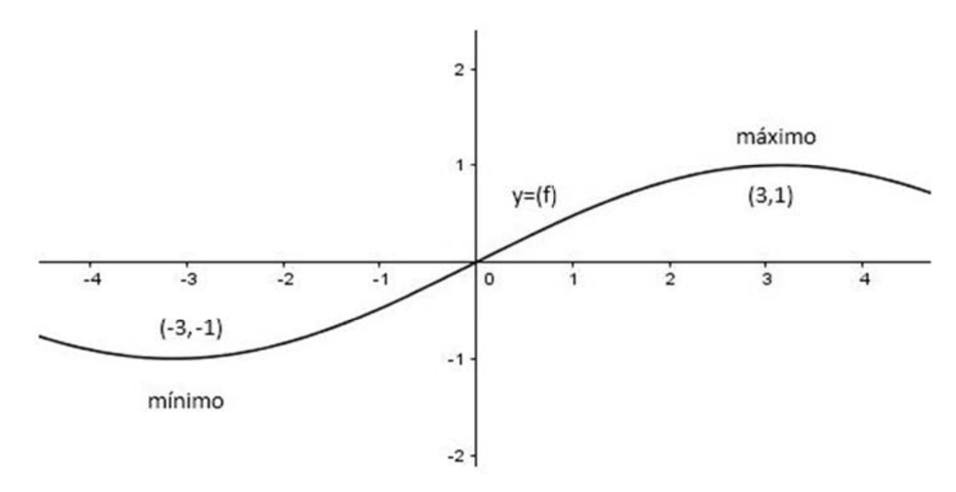
Máximos y mínimos relativos (o locales) de funciones derivables

Sea f una función definida en un intervalo $(a; b)$ y c un punto en $(a; b)$

•La función f(x) tiene un **máximo relativo** en $x = c$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo x de un intervalo abierto (por pequeño que sea) que contiene a c

- La función f(x) tiene un **mínimo relativo** en $x = c$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo x de un intervalo abierto (por pequeño que sea) que contiene a c

Si una función tiene un máximo o mínimo relativo (o local) se dirá que tiene un **extremo relativo.**



Condición necesaria de extremo. Criterio de la derivada primera

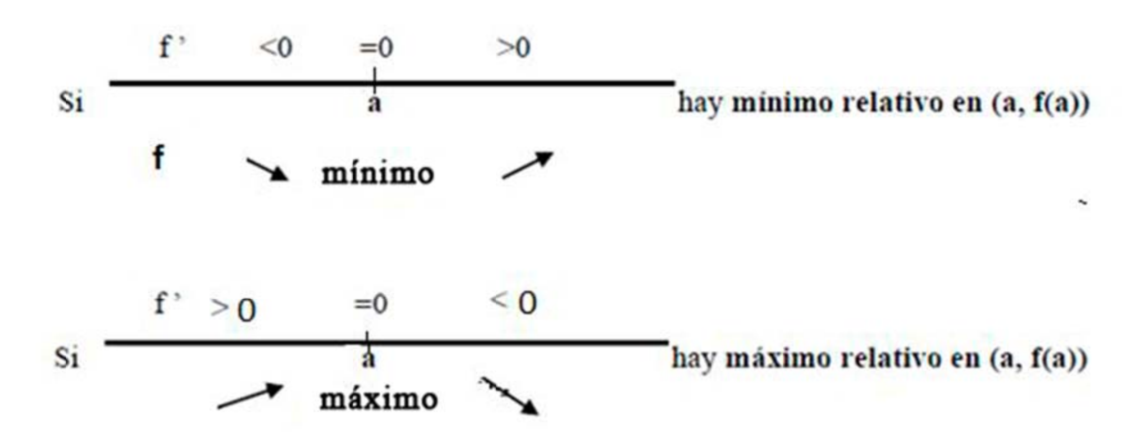
Si f tiene derivada en el punto de abscisa $x = a$ y f tiene en a un extremo relativo, entonces $f'(a) = 0$.

Si no fuera cierto y por ejemplo $f'(a) > 0$ entonces f sería creciente en un entorno del punto $\boldsymbol{a}$, que contradice la existencia de extremo. La condición no es suficiente.

La función $y = x^3$ es creciente en 0, entonces, no tiene extremos, sin embargo $f'(0) = 0$.

Criterio práctico

Hay extremo relativo en el punto si la derivada de la función en ese punto es cero (condición necesaria $f'(a) = 0$) y en dicho punto cambia el crecimiento. Esto se conoce como **criterio de la derivada primera**.



Condición suficiente de extremo. Criterio de la derivada segunda

Sea f una función derivable en $\boldsymbol{a}$ y f '($\boldsymbol{a}$)=0:

- Si $f\,''(a) > 0$ entonces f tiene un **mínimo** relativo en el punto de abscisa $x = a$.
- Si $f\,''(a) < 0$ entonces f tiene un **máximo** relativo en el punto de abscisa $x = a$.

Esto nos da también un método para resolver los problemas de máximos y mínimos para funciones derivables.

En la siguiente tabla mostramos los signos de la derivada que nos permite concluir el comportamiento de la función:

f(x)	crece	MAXIMO	decrece
f´(x)	+	0	-
f´´(x)	-	-	-

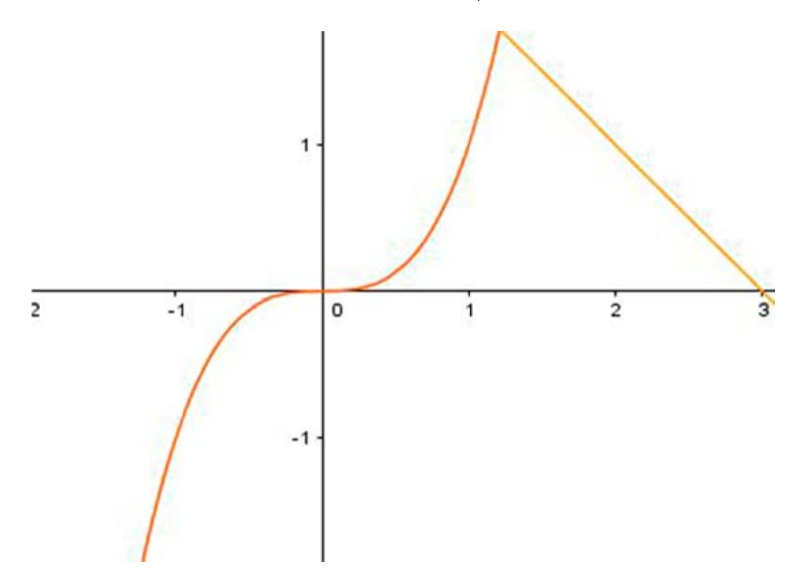
f(x)	decrece	MINIMO	crece
f´(x)	-	0	+
f´´(x)	+	+	+

Los extremos locales se pueden encontrar también en los puntos en los que la función no es derivable.

Se llaman **puntos críticos** a aquellos puntos en los que la derivada es cero o no está definida. En símbolos escribimos: $f'(x) = 0$ ó $f'(x)\ \nexists$

Así encontramos (las abscisas de) los puntos críticos.

Veamos un ejemplo. La función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, si -2 < x < 1 \\ -x + 3\,, si\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$ su dominio es (-2,3)

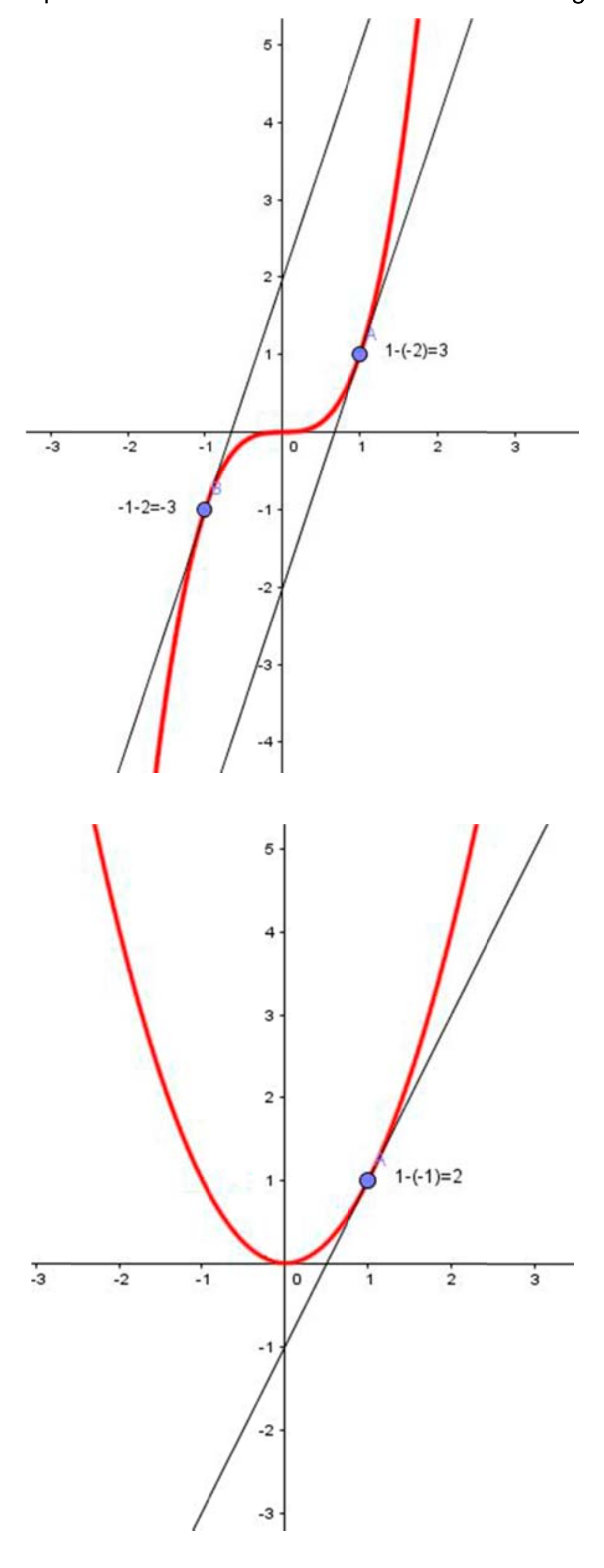


¿Tiene extremos locales? En caso afirmativo ¿en qué puntos se alcanzan? ¿Qué pasa con la derivada?

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Una función es **convexa** en $x = \boldsymbol{a}$, si existe un intervalo que contiene al punto $\boldsymbol{a}$**,** tal que la diferencia entre la ordenada de la función y la ordenada de la tangente a la gráfica de f en el punto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ es positiva en dicho intervalo.

Análogamente se dice que es **cóncava** cuando dicha diferencia es negativa.



Se dice que f tiene un **punto de inflexión** en $x = \boldsymbol{a}$ si existe un entorno de $\boldsymbol{a}$ en donde la diferencia entre la ordenada de f y la de la tangente en $\boldsymbol{a}$ tiene distinto signo a la izquierda que a la derecha.

Por lo tanto, f tiene un punto de inflexión en $\boldsymbol{a}$ si en dicho punto la tangente atraviesa la gráfica.

En la gráfica aparece la función $y = x^3$ y la tangente en el punto $x = 0$. Se aprecia que en dicho punto la gráfica posee una inflexión. Es cóncava de (0,+∞) y es convexa de (-∞, 0)

Si la función es derivable en $x = \boldsymbol{a}$ y $f''(a) > 0$ se verifica que f es convexa en $\boldsymbol{a}$.

Análogamente si f es derivable en $x = \boldsymbol{a}$ y $f''(a) < 0$ se verifica que f es cóncava en $\boldsymbol{a}$.

Criterio práctico

Para calcular los puntos de inflexión se halla la derivada segunda de f, se iguala a cero y se resuelve la ecuación. Se analiza el signo de la segunda derivada a derecha e izquierda de cada solución. Si cambia el signo hay punto de inflexión**,** es decir cambió la curvatura.

A modo de síntesis:

f ´´ (x)	+	0	-
f (x)	Convexa ∪	Punto de inflexión	Cóncava ∩

Aplicación de la derivada para representación gráfica de funciones

El análisis de una función nos permite realizar su gráfica, los siguientes ítems nos orientan, además de ofrecernos una información exhaustiva de la misma. Para ello estudiaremos la función, la derivada primera y la derivada segunda.

I) Estudio de f

1. Determinamos el dominio de f.
2. Hallamos los puntos de corte con los ejes.
3. Analizamos los signos de la función (regiones en las que varía el signo). Buscamos los intervalos donde la función queda por encima o por debajo del eje x
4. Analizamos la simetría.
    - Si $f(-x) = f(x)$, función par, simétricas respecto del eje de ordenadas.
    - Si $f(-x) = -f(x)$, función impar, simétrica respecto del origen.
5. Hallamos las asíntotas
    - Verticales

Si existe $\boldsymbol{a}$ tal que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $x = \boldsymbol{a}$ es la ecuación de una asíntota vertical.

- Horizontales

Si existe ***b*** tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$, $y = b$ es la ecuación de una asíntota horizontal.

- Oblicuas

Si existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ y $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = n$, $y = mx + n$ es una asíntota oblicua

II) Estudio de f '

1. Determinamos el crecimiento y decrecimiento.
   - Si $f'(x) > 0$, f es creciente.
   - Si $f'(x) < 0$, f es decreciente.
2. Hallamos los máximos y mínimos relativos.

III) Estudio de f ''

1. Evaluamos la concavidad y convexidad, $f'' > 0$ convexa ∪, $f'' < 0$ cóncava ∩
2. S i $f''(x_0) = 0$ y en dicho punto cambia la curvatura es un punto de inflexión.

Por ejemplo: analicemos la función $y = \frac{x}{x^2+1}$

I) Estudio de f
   1. Dom $f = R$
   2. Puntos de corte: (0,0)
   3. Signo de f, negativa en x<0 y positiva para x>0.
   4. Simetrías, $f(-x) = -f(x)$, luego es simétrica respecto del origen.
   5. Asíntotas:

      No hay verticales porque el dominio es el conjunto de todos los números R

      Horizontales *y=0*

      No hay oblicua

II) Estudio de f´

$f´(x) = \frac{(x^2+1)-2x.x}{(x^2+1)^2}$, $f´(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0, de\ donde\ x = \pm 1$

x	-∞		-1		1		∞
f´(x)	↘	-	0	↗	0	-	↘
f(x)		decrece	MINIMO	crece	MAXIMO	decrece	

f decrece en los intervalos (-∞, -1) y (-1, ∞) y crece en (-1,1)

Tiene un mínimo relativo en el punto (-1,- ½) y un máximo relativo en el punto (1, ½).

III) Estudio de f´´

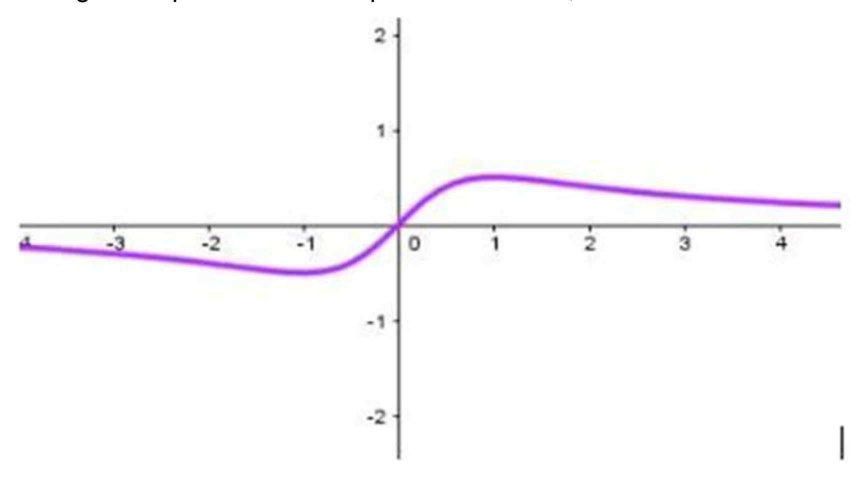
$$f´´(x) = \frac{-2x\,(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f´´(x) = 0$$

$$x = 0\ y\ x = \pm\sqrt{3}$$

x	-∞		-√3		0		+√3		∞
f ´´		-	0	+	0	-	0		
f		∩	inflexión	∪	inflexión	∩	inflexión	∪	

La gráfica que obtenemos aproximadamente, con estos datos es:



Actividad 1

1.1 Realizar el análisis completo de las siguientes funciones y representar gráficamente.

1.1.1 $f(x) = x^3 - 3x^2$

1.1.2 $f(x) = x^4 - 2x^2$

1.1.3 $f(x) = x^2 - 12x + 5$

1.1.4 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{11}{4}$

1.1.5 $f(x) = (2 - x)^3$

1.1.6 $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & si\ x < 3 \\ 3x - 10 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

1.1.7 $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & si\ x \leq -2 \\ x^2 + 1 & si\ x > -2 \end{cases}$

1.1.8 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1.2 El volumen del agua a una temperatura t, comparado con su volumen inicial V0 a 0º viene dado por la fórmula de Hällströn $V_t = V_0(1 - 0{,}0000576t + 0{,}0000076t^2 - 0{,}00000004t^3)$

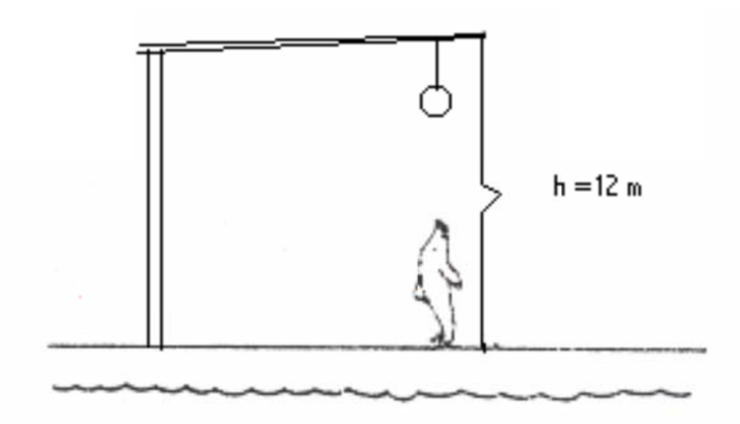
Determinar la temperatura que hace el volumen mínimo

1.3 El número de bacterias de un cultivo varía con el tiempo, expresado en minutos, según la ecuación $N = 500 + 50t - t^2$ para t ∈ [0,35]

1.3.1 ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población en el instante t=7 min?

1.3.2 ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población en el instante t=25 min?

1.3.3 ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la población en el instante t=30 min?



1.4 Para alcanzar una pelota que se encuentra a 12 metros de altura, un delfín sale del agua y se dirige verticalmente hacia arriba con una velocidad de 16 m/s. La posición del delfín h (t) (en metros) sobre la superficie del agua después de t segundos está por dada h (t) = 16 t – 4.9t².

1.4.1 ¿Cuál es la velocidad y la aceleración del delfín a los t segundos?

1.4.2 ¿Cuál es la velocidad y la aceleración del delfín justamente en t = 1 segundo?

1.4.3 ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el delfín?

1.4.4 ¿En qué instante toca el delfín la pelota?

1.4.5 ¿Cuánto tiempo dura el salto del delfín?

Actividad 2

2.1 Probar que el producto de dos números de suma constante es máximo cuando ambos son iguales.

2.2 Un terreno rectangular se va a cercar por 3 lados y un río servirá de límite para el cuarto lado. Calcular las dimensiones de la sección más grande que se pueda cercar con 240 m de alambre.

2.3 La función$f(t) = \frac{t}{20t^2+50t+80}$ (definida para t >0) expresa la concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis. Analizar las variaciones de dicha concentración con el paso del tiempo, indicando los intervalos de tiempo en los cuales la concentración aumenta y aquellos en los cuales disminuye.

2.4 Un antropólogo ha calculado que el costo total de repartir x raciones para alimentar a una población está dada por la expresión:$C(x) = 2x + \frac{217800}{x}$

2.4.1 Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 raciones, hallar el número de unidades que hará mínimo el costo del transporte.

2.4.2 ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 raciones?

Sugerimos leer del capítulo 9: “Velocidad de crecimiento del seno frontal”, donde se muestra la derivada de una función.

Diferenciales

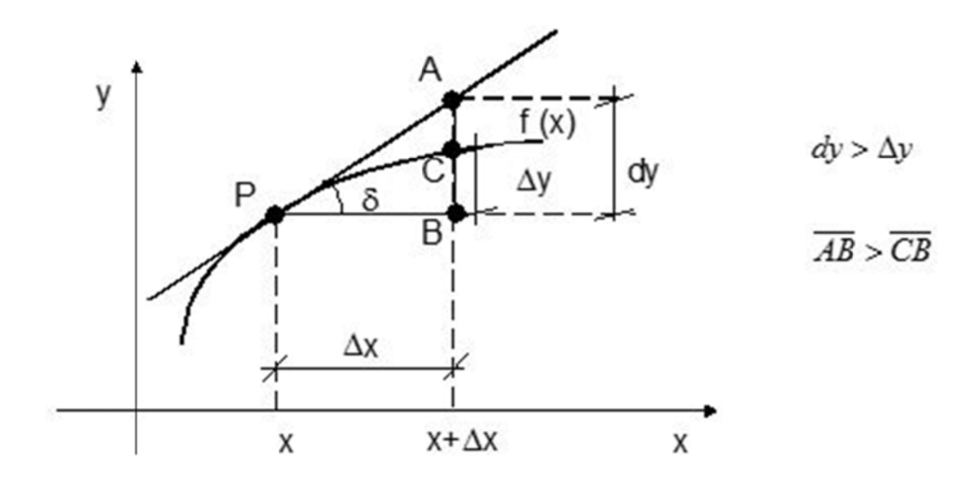
Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$. Vamos a definir **diferencial x** y **diferencial y,** que simbolizaremos dx y dy respectivamente de la siguiente manera:

$$dx = \Delta x$$

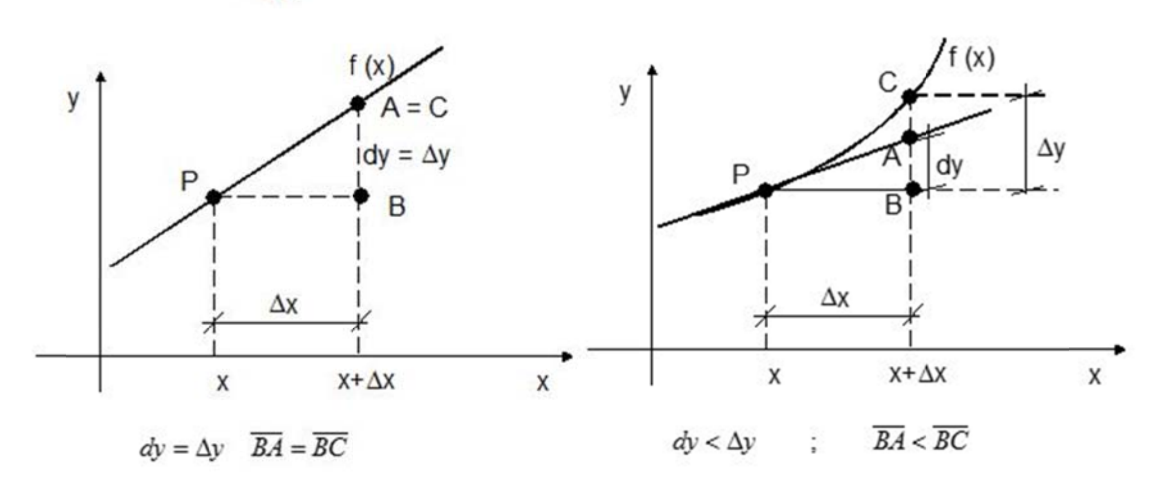
$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

es decir, el valor de dx coincide con el incremento de x y el valor de dy depende de la derivada de la función en x y del incremento Δx.

Gráficamente resulta:



$$tg\delta = \frac{\overline{AB}}{\Delta x} = f'(x) \therefore \overline{AB} = f'(x)\Delta x = dy \therefore dy = \overline{AB}$$



El diferencial de y (dy) puede ser mayor, igual o menor que Δy.

De la definición de diferencial tenemos que: $dy = f'(x)\,dx$

Esta igualdad expresa a la derivada como cociente de dos diferenciales. $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Cálculo de errores mediante diferenciales

Si dos magnitudes x e y están vinculadas por $y = f(x)$, a una variación Δx corresponde una variación Δy. Si Δx es el error cometido en la medición de x, Δy será el error cometido en f (x).

En lugar de calcular $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es más cómodo calcular dy que, si bien no es idéntico a Δy, se aproxima cuando se consideran pequeños incrementos de x, es decir $dy \cong \Delta y$.

Por ejemplo, una forma de aproximar la raíz cuadrada de un número x.

$$y = \sqrt{x} \qquad\qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$\Delta y \cong dy$, de donde:

$$\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \cong \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\sqrt{x + \Delta x} \cong \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \sqrt{x}$$

Aproximaremos $\sqrt{10}$ usando diferenciales.

Elegimos como valor de x un cuadrado perfecto: 9 y como dx = 1.

Por lo tanto:

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} \cong \frac{1}{2\sqrt{3^2}}(1) + \sqrt{3^2}$$

$$\sqrt{10} = \frac{1}{6} + 3$$

$$\sqrt{10} = 3{,}16$$

El valor exacto es 3,1623......

Bibliografía

Apostol, T. (1957). Mathematical analysis. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co.

Ayres, F., Mendelson, E. and Ayres, F. (1999). Schaum's outline of calculus. New York: McGraw-Hill.

Courant, R., John, F. and Courant, R. (1965). Introduction to calculus and analysis. New York: Interscience Publishers.

Cuéllar, C. Juan Antonio. (2014). Matemáticas V: Cálculo Diferencial. México McGrawHill.

Guzmán, M. and Colera, J. (1993). Selectividad, Matemáticas II. Madrid: Anaya.

Hadeler, K. (1982). Matemáticas para Biólogos. Barcelona [etc.]: Reverté.

Lang, S. (1987). Calculus of several variables. New York: Springer.
Larson R., Hostetler R. y Edwards B. (2006) Cálculo I. Octava edición México, McGraw- Hill.
Leithold, L. (1994). Matemáticas previas al cálculo. México: Oxford University Press.
López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.
Rey Pastor, J., Trejo, C. and Pi Calleja, P. (1952). Análisis Matemático. Buenos Aires: Editorial Kapelusz
Stewart James. (2008). Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición. México Cengage Learning.
Spiegel, M. and Moyer, R. (2000). Álgebra superior (3a. ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Webgrafía

http://personal.us.es/pmr/images/pdfs/gb-mab-apuntes.pdf
http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/experiencias/experiencias_AN_0506/derivadas/aplicaciones_derivada.doc
http://docplayer.es/14787959-Capitulo-3-aplicaciones-de-la-derivada-licda-elsie-hernandez-saborio-instituto-tecnologico-de-costa-rica-escuela-de-matematica.html

CAPÍTULO 5
Integrales

Anyelen Di Paolantonio y Guillermo Lamenza

Integración de funciones

¿Qué es integrar una función?

Entenderemos a la integración como una operación matemática que resulta ser la operación inversa a la derivación, así como la división lo es a la multiplicación, o la radicación lo es a la potenciación. Para ello, definiremos algunos conceptos analizando un ejemplo:

Consideremos la función $f(x)=x^3$ cuya derivada es $f'(x)=3x^2$.

Pensemos ahora en el camino inverso, es decir si tuviéramos la función $f(x)=3x^2$, y quisiéramos saber de qué función derivada se obtuvo. ¿Cuál es el procedimiento a realizar? Pensar qué función derivamos para obtener ese resultado.

$f(x)=3x^2$ es una función polinómica, con lo cual su derivada, por regla, se obtuvo de derivar $F(x)=x^3$.

A ésta última función que obtuvimos se la llama **primitiva** o **antiderivada** de la función $f(x)=3x^2$.

En general, a una función $F(x)$ se la denomina primitiva o antiderivada de la función $f(x)$, si y sólo si al derivar $F(x)$ se obtiene $f(x)$ en un intervalo real I.

En símbolos, $F(x)$ es una primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x \in I$

Sin embargo, $f(x)$ no tiene una única primitiva, sino que todas las funciones de la forma $F(x)+C$, es decir, que difieren en una constante C real, son primitivas de $f(x)$ dado que la derivada de una constante es cero.

Teorema: Familia de primitivas

$F(x)+C$ son las primitivas de $f(x)$ sí y sólo si $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$

La operación de hallar todas las primitivas de una función $f(x)$ se llama **integración indefinida** o **antiderivación**. Simbólicamente: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Algunas propiedades de la integración

- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

  La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

- $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

  La integral de la suma o resta de dos funciones es igual a la suma o resta de las integrales de cada función.

Lista de algunas primitivas

Observamos que, si leemos en sentido inverso la tabla de derivadas, obtenemos el siguiente listado.

- $\int k\ dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \wedge n \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + C$

Actividad 1

Hallar las primitivas

1.1 $\int x^2 dx =$ 1.2 $\int \frac{x^2}{2} dx$= 1.3 $\int \sqrt{x}\, dx =$

1.4 $\int \frac{dx}{x} =$ 1.5 $\int \sqrt[3]{x^2} dx =$ 1.6 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$

1.7 $\int \frac{cosx}{5} dx =$ 1.8 $\int \left(2 - \dfrac{3}{t^2} + \dfrac{4}{t^4} \right) dt$ = 1.9$\int by^2(y-a)dy =$

1.10$\int (2+x)^2 dx =$ 1.11 $\int \dfrac{x^2+1}{x} dx =$ 1.12 $\int (sen\ u - \dfrac{1}{2}\cos\ u)\ du =$

Métodos de integración

Generalmente sucede que las funciones a integrar no tienen una familia de primitivas que se pueden hallar directamente. Para ello, existen métodos que nos permiten encontrar dichas primitivas.

Integración por sustitución

En algunos casos nos podemos encontrar con integrandos que son el producto de una función y su derivada o parte de ella.

Consideremos la función $f(x)=\sqrt{x^3+1}\cdot 3x^2$.

Si llamamos $u=u(x)=x^3+1$, su derivada es $du=u'(x)dx=3x^2dx$. El método de sustitución nos permite hacer lo siguiente:

$\int f(x)dx=\int \sqrt{x^3+1}\cdot 3x^2dx=\int \sqrt{u(x)}.u'(x)dx=\int \sqrt{u}du \rightarrow$ simplificando la notación.

La resolvemos aplicando reglas: $\int \sqrt{u}du=\int u^{\frac{1}{2}}du=\dfrac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

Y por último, reemplazamos por lo que originalmente habíamos llamado $u=u(x)=x^3+1$:

$$\int f(x)dx=\frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

Otro ejemplo:

Resolver $\int 2x\cdot e^{\left(x^2+1\right)}dx$

Para resolver esta integral podemos usar el método de sustitución porque en ella encontramos la función x^2+1 y su derivada $2x$.

A la función la llamamos $u=x^2+1$ y con la derivada y el dx formamos el du: $du=d\left(x^2+1\right)=2xdx$.

Reemplazando la integral que queremos resolver:

$$\int 2x\cdot e^{\left(x^2+1\right)}dx=\int e^u du=e^u+C=e^{\left(x^2+1\right)}+C$$

Actividad 2

Calcular aplicando el método de sustitución:

2.1 $\int 2x(x^2+4)^3dx =$ 2.2 $\int \frac{3x}{x^2+1}dx =$ 2.3 $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx =$

2.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x}} =$ 2.5 $\int \frac{bx}{\sqrt{c^2-x^2}}dx =$ 2.6 $\int \frac{1+lnx}{x}dx =$

2.7 $\int 2^{-2x}dx =$ 2.8 $\int cosxsenxdx =$ 2.9 $\int asen(wt)dt =$

Otro método muy utilizado para la resolución de integrales indefinidas es el siguiente.

Integración por partes

Este método nos es útil cuando reconocemos en el integrando el producto entre una función y el diferencial de otra. Se deduce de la derivada por regla de un producto de funciones.

Consideremos la siguiente función: $f(x) = x \cdot e^x$

Supongamos que queremos derivarla por regla, entonces tomamos: $u(x) = x$ y $v(x) = e^x$

La elección no es arbitraria, se hará de manera que se simplifique al máximo la integral que quede por resolver.

Recordando la derivada de un producto: $f'(x) = [u(x)\cdot v(x)]' = u(x)'\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x)'$ y aplicándola a la función obtenemos: $f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x$.

Si tomamos la regla del producto y la integramos:

$$\int f'(x)dx = \underbrace{\underbrace{\int [u(x)\cdot v(x)]'dx}_{\text{la integral de una derivada es la misma función}}}_{u(x)\cdot v(x)} = \int [u(x)'\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x)']dx = \int u(x)'\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v(x)'dx$$

Entonces $$u(x)\cdot v(x) = \int u(x)'\cdot v(x)dx + \underbrace{\int u(x)\cdot v(x)'dx}_{\text{ésta es la integral que queríamos resolver}}$$

Despejando:

$$\boxed{\int u(x)\cdot v(x)'dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x).u(x)'dx}$$

Veamos el ejemplo con el que estábamos trabajando.

Tomamos la derivada y la integramos:

$$\underbrace{\underbrace{\int f'(x)dx}_{\substack{\text{la integral de}\\ \text{la derivada es}\\ \text{la función}}}}_{f(x)=x\cdot e^x} = \int\left(1\cdot e^x + x\cdot e^x\right)dx = \int 1\cdot e^x dx + \underbrace{\underbrace{\int x\cdot e^x dx}_{\substack{\text{la integral que}\\ \text{queremos}\\ \text{resolver}}}}_{\int x\cdot e^x dx}$$

Entonces:

$$\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx$$
$$\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x = e^x\left(x-1\right)+C$$

Actividad 3

Calcular utilizando el método de integración por partes

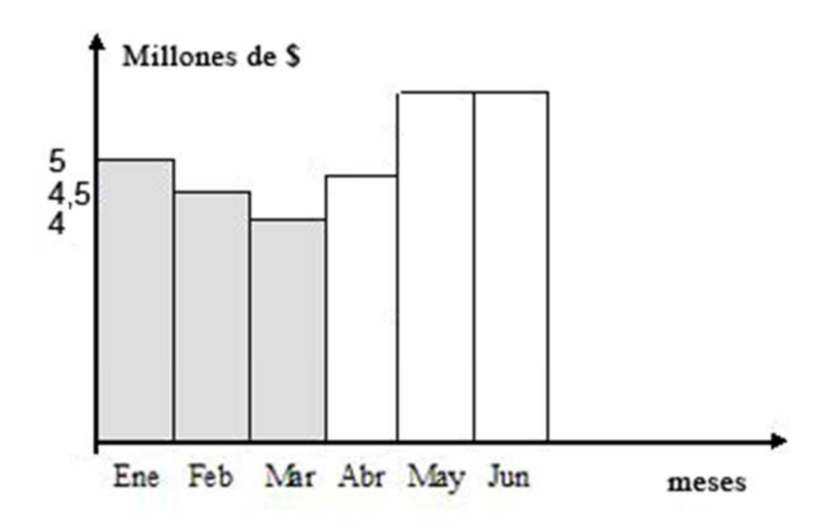
3.1 $\int lnx\ dx =$ 3.2 $\int x^2 \ln\ x\ \ dx =$ 3.3 $\int x^2 e^x\ \ dx =$

3.4 $\int x\ \cos\ x\ dx =$ 3.5 $\int x\ e^x\ \ dx =$ 3.6 $\int \ln\left(\frac{x}{2}\right)dx =$

Previamente habíamos definido a la integración como la operación inversa a la derivación y calculamos integrales indefinidas hallando su familia de primitivas. Ahora desarrollaremos el concepto de integral como cálculo de áreas.

Existe una cantidad muy importante de funciones para las cuales tiene interés particular el cálculo del área bajo su gráfica, algunos ejemplos son:

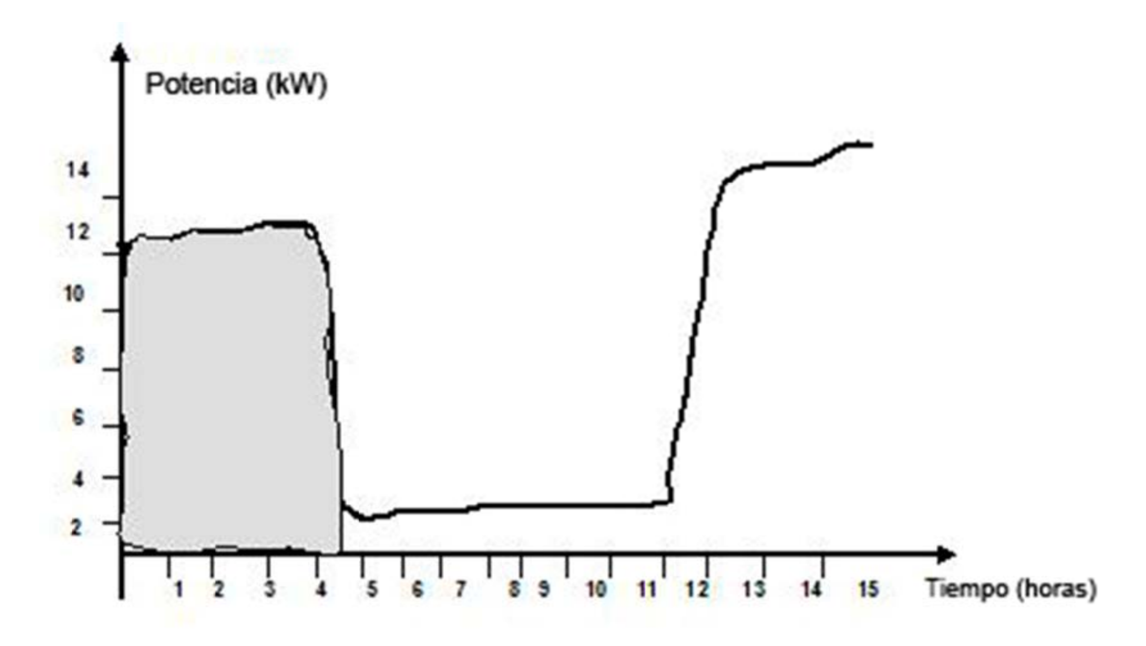
- Las ganancias de una compañía de electricidad durante el primer semestre del año, se representa en la siguiente gráfica:



Si queremos conocer las ganancias acumuladas al finalizar el mes de marzo, sólo tenemos que calcular el área bajo la curva de ganancias para los tres primeros meses:

5 + 4,5 + 4 = 13,5 millones de pesos.

- La figura representa la potencia, en kW, que se está empleando en cada momento en un cierto local, a lo largo del día



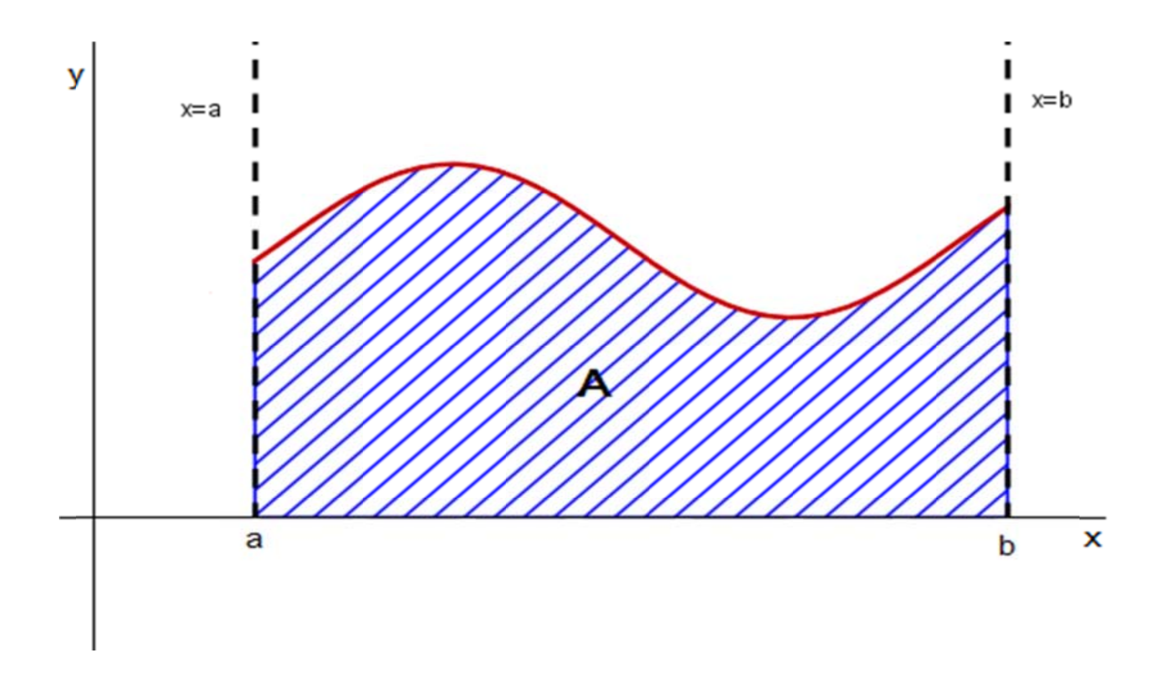
. Queremos calcular el consumo de energía entre las 0 horas y las 4,5 horas de la mañana. La energía, en kWh, es el área bajo la curva de potencia y, para nuestro caso es aproximadamente:

(12,1 kW).(4,5 horas) = 54,45 kWh

Terminamos de ver dos ejemplos en los cuales el área bajo la curva de una determinada función tiene, en cada caso, un significado especial:

- El área bajo la curva de ganancias nos da el monto de las ganancias acumuladas
- El área bajo la curva de potencia, nos proporciona la energía consumida.

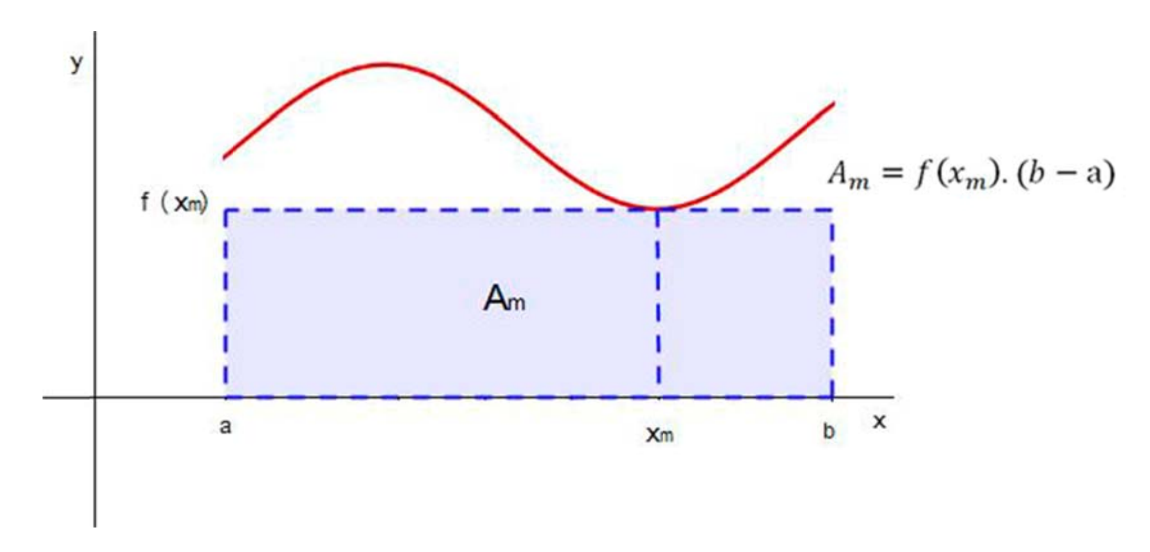
De los ejemplos anteriores podemos entender que el cálculo de área bajo una curva puede resultar de mucha utilidad. Esto nos lleva a averiguar cómo puede calcularse el área. Para ello, conociendo la ecuación de una curva y = f (x), veremos cómo hallar el área entre dicha curva, el eje de las x y dos rectas que pasan por los puntos cuyas abscisas son x = a y x = b.



Una primera aproximación es calcular el área mediante un rectángulo con base en el eje x y altura equivalente al mínimo valor que toma la función en todo el ancho del correspondiente rectángulo.

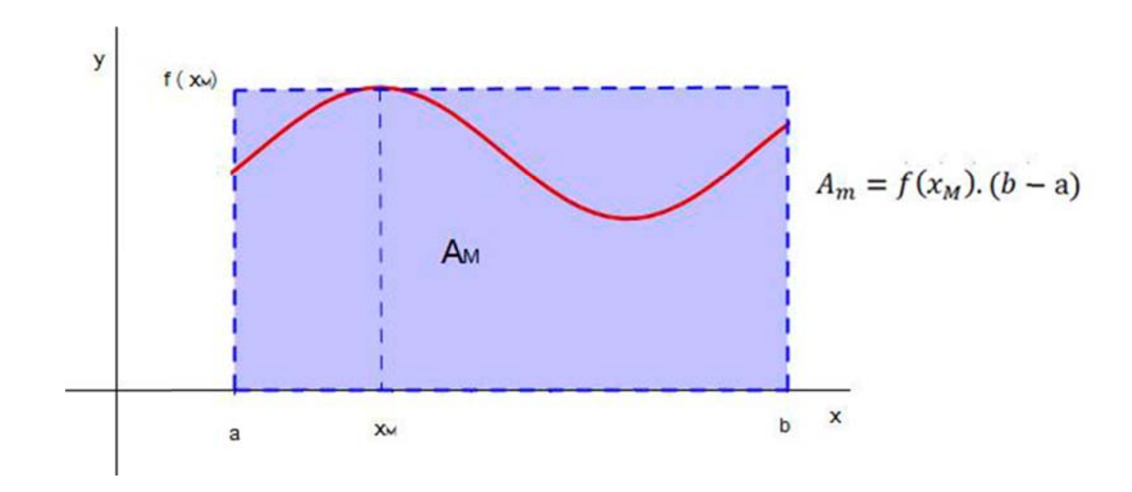
Queremos calcular el área encerrada por la curva de la función f(x), el eje de las x y las rectas de ecuación x = a y x = b.

En este caso calcularemos el área del rectángulo cuya base será el segmento $\overline{\mathrm{ab}}$ y cuya altura será el valor $f(x_m)$ siendo x_m la abscisa para la cual la función f(x) asume su valor mínimo en el intervalo considerado; de manera que tal área será menor que el área que pretendemos calcular.



A esta área la llamaremos A_m. Ésta será el producto de f (x_m) por (b – a). Es decir $A_m = f(x_m).(b - \mathrm{a})$

De manera análoga tomaremos el rectángulo de base $\overline{ab}$ y $f(x_M)$, siendo x_M la abscisa donde la función toma su valor máximo; en tal caso el área calculada superará el valor del área bajo la curva.



Si consideramos una división del intervalo dado [a,b] en subintervalos y calculamos áreas de rectángulos que se ajusten a la curva, obtendremos una mejor aproximación al área exacta que define la función f(x).

Para esto debemos definir que es una **partición de un intervalo** [a,b] tomando n+1 valores x_i, pertenecientes a dicho intervalo, tales que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots\dots < x_{i-1} < x_i < \dots.x_n = b$$

a la cual llamaremos **partición de orden n**, denotando como $\mathbf{P_n}$ al conjunto de estos subintervalos definidos por dos valores sucesivos x_i.

$$P_n = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots\dots\dots [x_{i-1}, x_i], \dots\dots [x_{n-1}, x_n]\}$$

Llamaremos longitud del intervalo [a,b] al número: b – a , y entonces la longitud del subintervalo i – ésimo será el número:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Se define **norma de la partición** al mayor número de los Δx_i , es decir la norma N es:

N = máximo Δx_i

De manera que nos proporciona la longitud del mayor subintervalo.

También debemos definir el **aumento de una partición en un intervalo** [a,b].

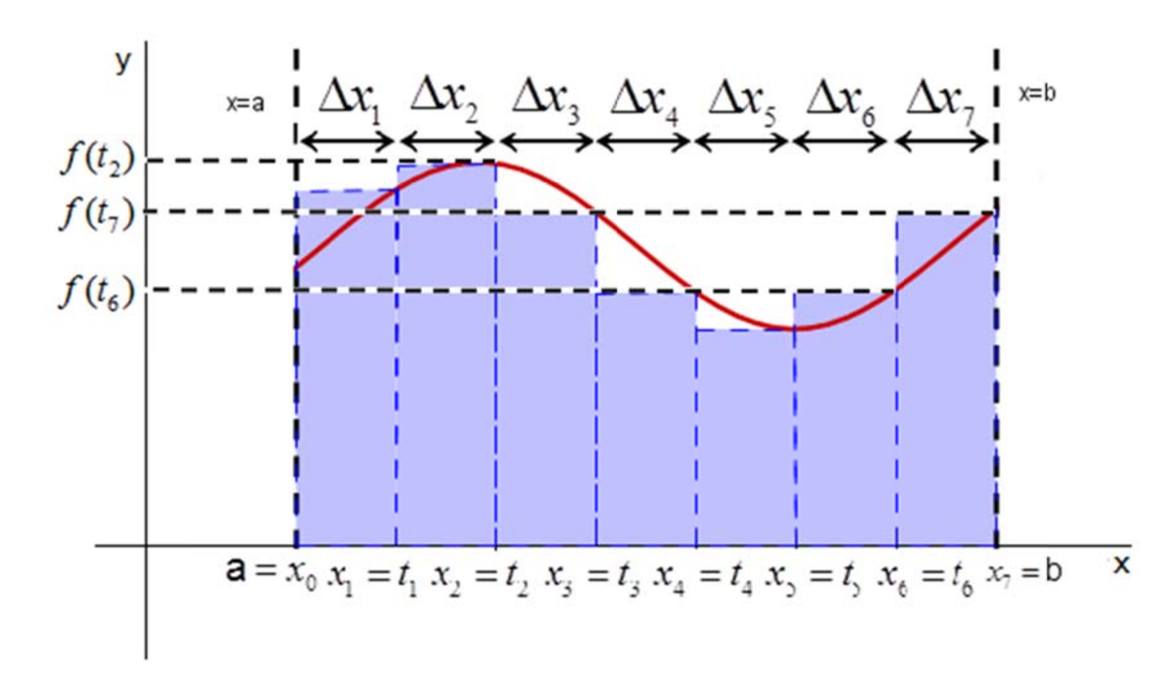
Dada una partición P_n llamaremos aumento de dicha partición al conjunto de números $t_1, t_2, \dots\dots., t_i, \dots.., t_n$ pertenecientes cada uno a un subintervalo distinto de la partición. En símbolos:

$$T_n = \{t_1, t_2, \dots\dots., t_i, \dots.., t_n\}$$

tal que cumplan las condiciones:

$$x_{i-1} \le t_i \le x_i \quad \text{para i = 1, 2, ...,n.}$$

Volviendo al cálculo del área bajo la curva y haciendo ahora una partición P_n del [a,b], definiendo en ella un aumento T_n y tomando como área la suma de las áreas de los rectángulos elementales: $A_i = f(t_i)\Delta x_i$



En la figura el área aproximada está dada por la suma $A_{aprox} = \sum_{i=1}^{7} A_i$ como $A_i = f(t_i)\Delta x_i$,

entonces $A_{aprox} = \sum_{i=1}^{7} f(t_i)\Delta x_i$

Suma de Riemann

Sea una función f(x) definida en el intervalo cerrado [a,b], P_n una partición de ese intervalo y T_n un aumento correspondiente a esa partición. Se toma el producto entre la longitud Δx_i y el valor de la función f(x): $f(t_i)\ \Delta x_i$

Llamaremos **suma de Riemann** a la suma de todos estos productos:

S_n = $f(t_1)\ \Delta x_1 + f(t_2)\ \Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_i)\ \Delta x_i + \ldots\ldots\ldots + f(t_n)\ \Delta x_n$ que en forma abreviada escribiremos: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$

El valor que toma la suma dependerá de la función f(x) considerada, de los valores de a y b, de la partición específica P_n que se haya elegido, y también de los valores t_i tomados para el aumento.

Integral Definida

Continuando con la idea de dividir al intervalo en el cual queremos calcular el área, seleccionando rectángulos que mejor se ajusten a la curva, iremos tomando distintas particiones P_n cada una posterior a la otra a medida que n, el número de sub-intervalos crece. Consecuentemente, aumentando el número de intervalos haciendo tender n a infinito, pero teniendo la precaución de no dejar ningún subintervalo sin subdividir. Para lograr esto, por ejemplo, se puede hacer que cada partición posterior se obtenga de una anterior por una subdivisión de cada subintervalo en dos.

Además, si a medida que aumentamos n haciendo tender la norma N a cero, estamos asegurando que ningún subintervalo permanezca sin subdividir.

Teniendo en cuenta estas consideraciones sobre la forma particular de hacer tender n a infinito, podemos definir la integral definida como el límite I al cual tiende la suma de Riemann, siempre que dicho límite exista. Si el límite ***I*** existe, decimos que f(x) es integrable sobre $[a,b]$

Si una función es continua sobre $[a,b]$ entonces se puede demostrar que es integrable sobre dicho intervalo, cuando el número de subintervalos n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i = I$$

y para expresarlo usaremos el símbolo de Leibnitz: $I = \int_a^b f(x)\ dx$

que se lee "integral entre a y b de f de x, diferencial de x". El símbolo $\int$ proviene de una deformación de la S de suma; el número "a" recibe el nombre de límite inferior de integración y "b" el de límite superior.

Llamaremos intervalo de integración, al intervalo $[a,b]$ y a f(x), integrando.

Entonces: $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$ usando el concepto de norma, esto mismo se podrá escribir: $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{N\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i$

Se puede demostrar, que una vez aplicado el límite sobre la suma de Riemann, el valor resultante, es decir la integral, ya no depende de la partición ni del aumento particularmente tomado, sino sólo de la función f(x) y de los extremos a y b. Se hace notar especialmente que el cálculo de una integral definida es un número, el que resulte del límite propuesto sobre la suma de Riemann.

Si volvemos sobre el cálculo del área bajo la curva planteado anteriormente, en donde obtuvimos como resultado: $A_{aprox} = \sum_{i=1}^{7} f(t_i)\Delta x_i$, intuitivamente nos damos cuenta que el área aproximada A_{aprox} se ajustará cada vez más al área A bajo la curva a medida que mayor sea el

número de intervalos de la partición. También es intuitivo que, en el límite, cuando el número de los rectángulos elementales tiende a ∞, la suma dará exactamente el área A.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Como conclusión obtenemos:

Si f(x) es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a,b]$, el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

Área= $\int_a^b f(x)\,dx$

Algunas propiedades de la integral definida

- Intervalo de integración de longitud nula: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$
- Aditividad de los intervalos de integración:

$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$ si c es un punto del intervalo $[a,b]$

- Intercambio de los extremos de integración: $\int_a^c f(x)\ dx = -\int_c^a f(x)\ dx$
- Propiedad lineal de las integrales definidas:

- Propiedad de aditividad o superposición:

$\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx$

- Propiedad de homogeneidad:

$\int_a^b K\ f(x)\ dx = K\int_a^b f(x)\ dx$

Si f(x) es una función continua en $[a,b]$, $x \in [a,b]$ entonces se puede definir la función integral $A(x) = \int_a^x f(x)\ dx$ donde $A(x)$ es una primitiva de f(x); o sea: $A'(x) = f(x)$. Esta definición nos es útil para la demostración del siguiente teorema.

Teorema Fundamental de Cálculo Integral

Sea F(x) una primitiva de f(x), entonces se verifica que

$F'(x) = f(x)$ (I);

por la definición anterior la función integral A(x) es otra primitiva de f(x) o sea:

$A'(x) = f(x)$ (II)

y sabemos que dos funciones que tienen igual derivada difieren de una constante. Por lo tanto de las ecuaciones (I) y (II) podemos plantear:

(III) $A(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$

Para calcular la constante **C** hacemos x = a.

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(x) + C$$

Usando una de las propiedades de la integral definida

$$0 = F(a) + C$$

de donde

$C = -F(a)$ (IV)

Reemplazando (IV) en (III)

$$\int_a^x f(x)\ dx = F(x) - \underbrace{F(a)}_{c}$$

y haciendo x = b, resulta

$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ (V) conocida con el nombre de:

Regla de Barrow

Recordemos que F(x) es una primitiva de f(x).

La expresión (V) vincula el concepto de integral definida y el de antiderivada, que como sabemos, se calcula mediante integración indefinida. El uso de esta regla simplifica notablemente el cálculo de las integrales definidas.

Resulta cómodo usar la notación:

$$F(b) - F(a) = F(x)\ \Big]_a^b$$

con ello la regla de Barrow puede escribirse:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\ \Big]_a^b$$

Por ejemplo, para hallar $\int_{-1}^{2} x^2\ \ dx$

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$$

Actividad 4

Hallar las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow:

$4.1\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx =$ $\qquad$ $4.2\int_0^{\sqrt{3}} t\cdot\sqrt{t^2+1}dt =$

$4.3\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x+3} =$ $\qquad$ $4.4\int_0^{-1} x\cdot e^x dx =$

$4.5\int_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)dx =$ $\qquad$ $4.6\int_1^e 2x\cdot\ln(x)dx =$

Cálculo de áreas por integración definida

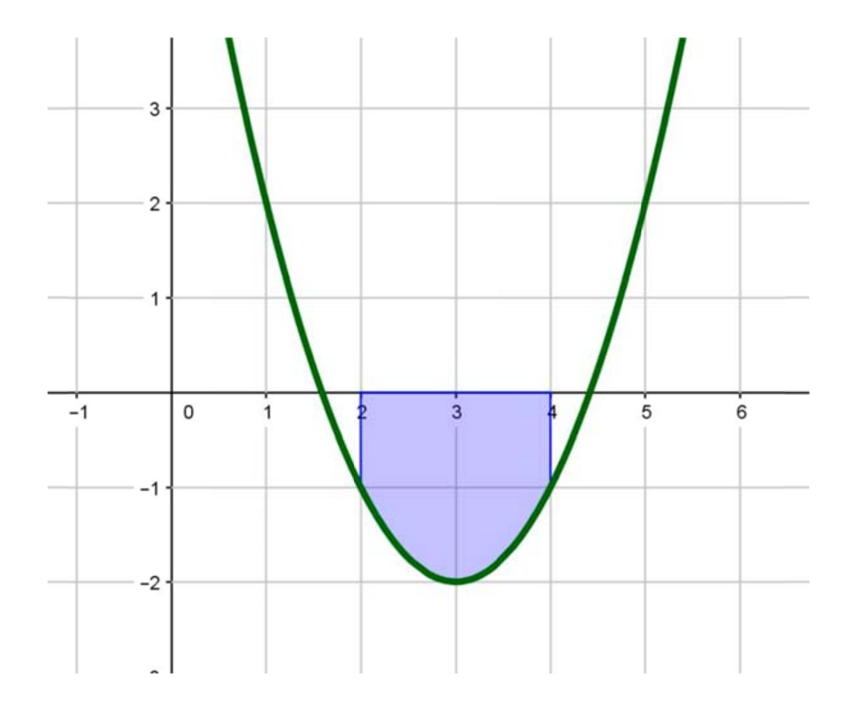
Las áreas, siendo números que representan una medida de superficie, es decir el número de veces que cabe la unidad de superficie, no pueden ser negativas.

Las integrales definidas en cambio, sí pueden dar como resultado un número negativo. Esto ocurre precisamente toda vez que la función asume valores negativos en la totalidad del intervalo de integración.

Por ejemplo, integremos la función $f(x)=(x-3)^2-2$ entre los valores 2 y 4 y el eje x

$$\int_2^4\left[(x-3)^2-2\right]dx=\int_2^4\left(x^2-6x+7\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+7x\right)\Bigg]_2^4=$$

$$\left(\frac{64}{3}-48+28\right)-\left(\frac{8}{3}-12+14\right)=\frac{4}{3}-\frac{14}{3}=-\frac{10}{3}$$



Dentro de ese intervalo la función toma exclusivamente valores negativos y el valor resultante de la integración es un número negativo; sin embargo, el área entre la curva y el eje

no puede ser negativa; en consecuencia, debe tomarse el valor absoluto del resultado de la integral cuando lo que se está calculando es un área. El valor negativo de la integral en estos casos lo único que indica es que la curva está por debajo del eje x.

En estos casos, tomamos el valor absoluto del resultado: $\left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$. Este será el valor del área que encierran las curvas dadas.

La dificultad se presenta cuando a lo largo del intervalo de integración la función cambia de signo de modo que parte de la curva queda debajo del eje x y parte encima de él. Si no se tiene la precaución de graficar la curva y con ello evidenciar este hecho, se cometerá el error de suponer que la integral está dando el área entre la curva y el eje x, cuando en realidad el resultado de la integral estará dando la diferencia entre las áreas que están por encima del eje x y las que están debajo.

En el ejemplo, ocurriría esto si integramos entre 0 y 6. Para evitar este inconveniente debemos dividir el intervalo de integración en tantos subintervalos dentro de los cuales la función tenga un mismo signo; integrar entonces separadamente sobre cada intervalo y sumar luego los valores absolutos de cada resultado.

Por ejemplo, calcularemos el área limitada por $y = x^2 - 2x$, el eje x y las rectas x=0 y x=3

1) Hallamos las intersecciones de la curva con el eje x.

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$ resulta $x_1 = 0$ $\quad y \quad$ $x_2 = 2$

2) Calculamos la integral definida en $[0,2]$

$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

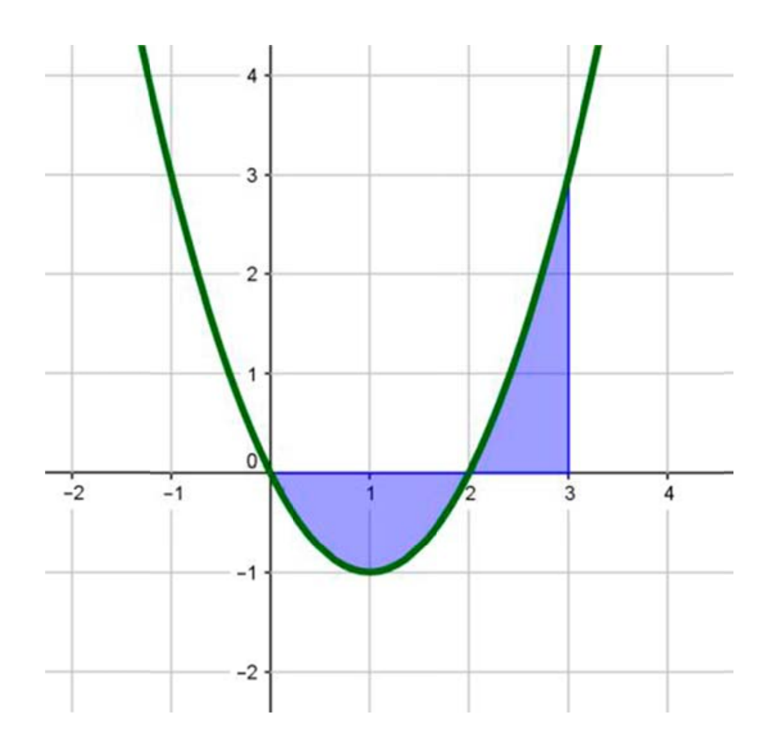
Tomamos el valor absoluto del resultado obtenido: $\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

3) Calculamos la integral definida en $[2,3]$

$$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{27}{3} - 9 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

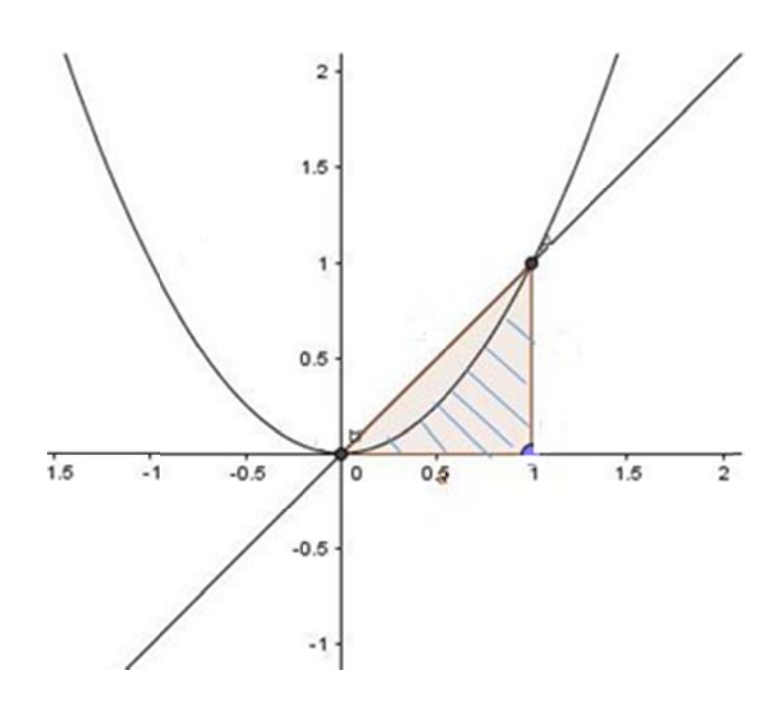
Finalmente se suman los resultados que obtuvimos:

$$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

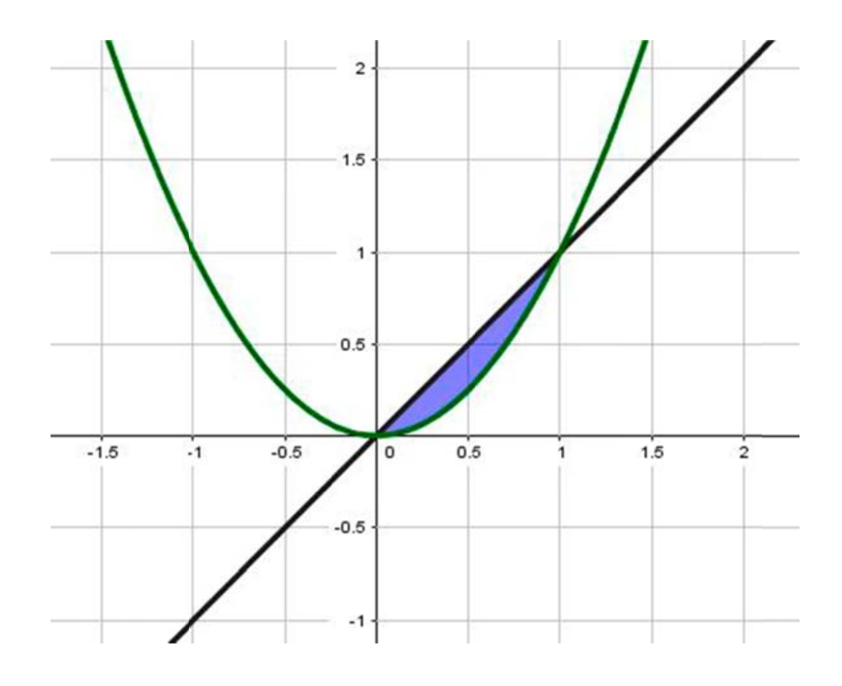


Calcularemos el área encerrada entre la recta **y = x** y la parábola **y = x^2**

El área deberá obtenerse como diferencia entre el área bajo la recta y el área bajo la parábola, entre los límites que marcan las intersecciones de ambas gráficas, es decir: $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0$ que tiene como raíces 0 y 1



$$\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



Actividad 5

Hallar el área limitada por:

5.1 $y = x^2 - 5x$ y el eje x

5.2 $y = x - x^2 + 6$ y el eje x

5.3 $y = x^2 - x - 2$ $y = 0, x = 1$ y $x = 3$

5.4 $y = \ln(x)$ el eje x en el intervalo [1,e]

5.5 $y = senx$ $y = 0, x = 0, x = 2\pi$

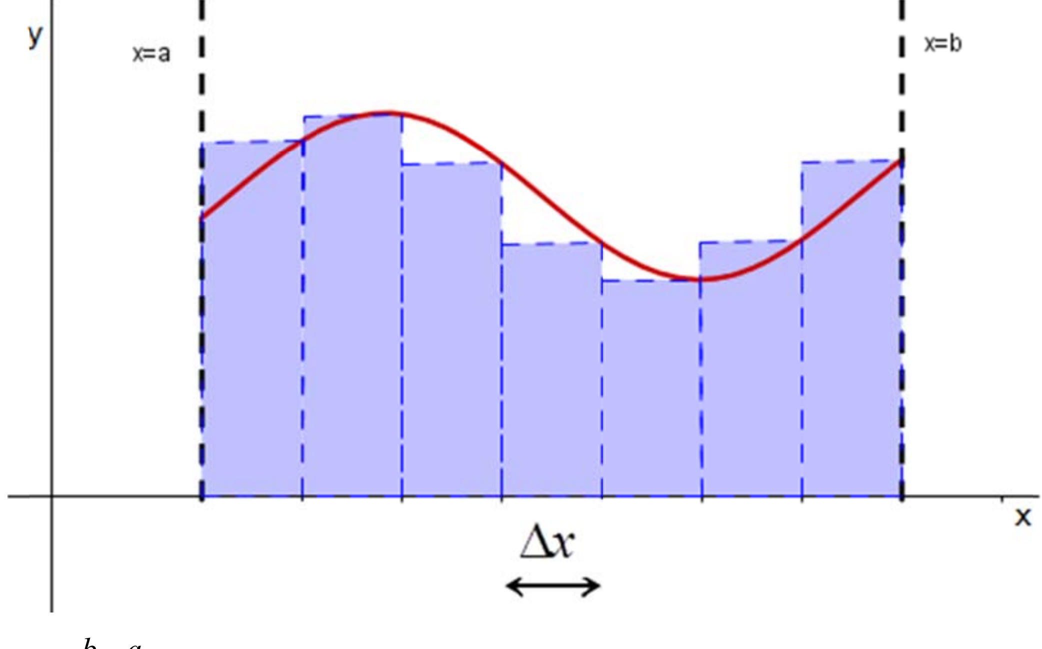
5.6 $y = x - x^2$ e $y = -x$

5.7 $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 6x + 10$

Integración numérica

En general sucede que no se puede hallar el valor exacto de una integral, ya sea porque el caso de aplicación no lo requiere o más comúnmente porque las funciones a integrar no tienen primitiva fácilmente calculable. Dado que la integral de una función puede obtenerse hallando el límite de una sucesión, para aproximar dicho resultado se emplea el mismo procedimiento tomando un término de la sucesión suficientemente avanzado.

Partimos el intervalo [*a,b*] en n sub-intervalos igual de longitud Δx y tomamos el valor de la función en el extremo izquierdo de cada intervalo, de manera que la integral tiene como valor aproximado:



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \Delta x\,[f(a)+f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\cdots+f(a+(n-1)\Delta x)]$$

Por ejemplo, calculando la integral: $\int_0^1 x\,dx$

a) Por el método exacto: $\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2} = 0,5$

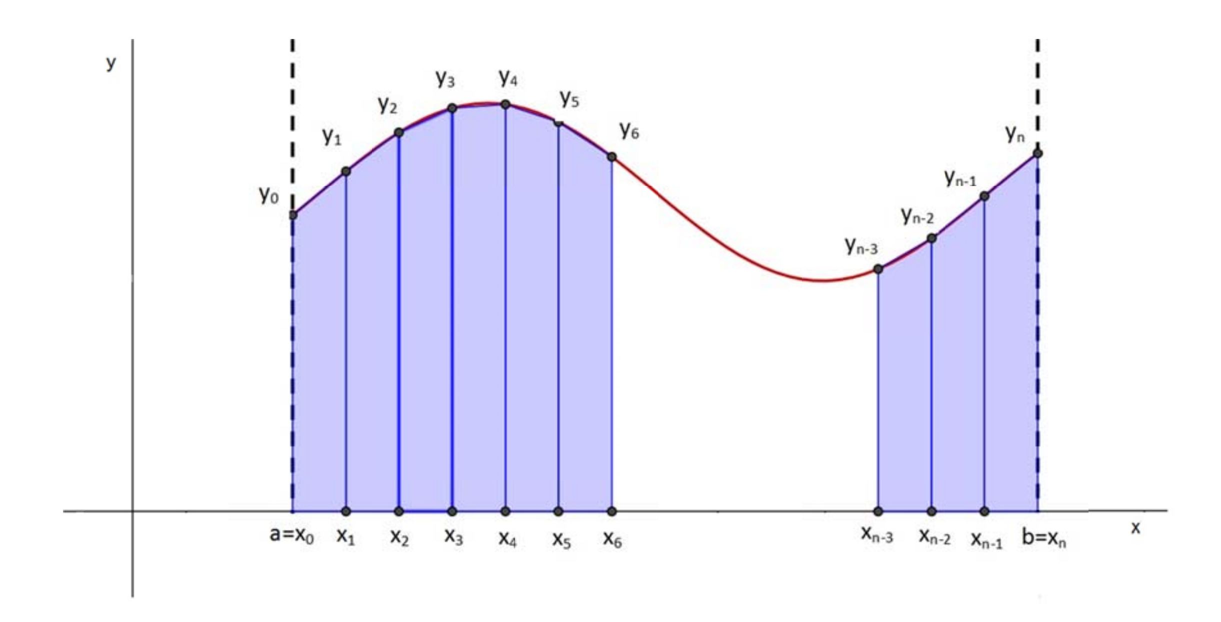
b) Por el método aproximado: hacemos n = 100 para lo cual resulta $\Delta x = \frac{1-0}{100} = 0,01$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{100}\left[0+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{98}{100}+\frac{99}{100}\right] = 0,495 \text{ (el valor exacto es 0,5)}$$

Un método de cálculo aproximado que mejora el de tomar rectángulos de igual base y alturas correspondientes al valor de la función en el extremo izquierdo (o derecho) de los subintervalos es el llamado:

Método de los Trapecios

Este método reemplaza cada uno de los rectángulos elementales por un trapecio de altura igual a la longitud Δx común de los sub-intervalos y bases respectivamente iguales a los valores de la función en los extremos de cada uno de los sub-intervalos, consiguiéndose, de este modo una mejor aproximación al valor exacto de la integral.



Suponemos entonces conocidos los valores que toma la función en los puntos situados a igual distancia $x_0, x_1, ..., x_n$ siendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Un primer valor aproximado del área limitada por los puntos A_0, A_n, x_n, x_0 puede obtenerse sumando las áreas de los trapecios inscriptos en cada una de las superficies parciales.

Área $(y_0, y_1, x_0, x_1) = ½\, \Delta x*(y_0 + y_1)$; la suma resulta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{2}*\left(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n\right)=\Delta x\left(\frac{E}{2}+P+I\right)$$

siendo E = suma de las ordenadas extremas; P = suma de las ordenadas de subíndices pares; I = suma de las ordenadas de índices impares.

Por ejemplo, calcularemos: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$ (esta integral no puede hallarse fácilmente con la Regla de Barrow)

Siendo $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$; tomando Δx = 0,1 puede construirse la siguiente tabla:

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	0,7071	0,7053	0,7001	0,6917	0,6804	0,6666	0,6509	0,6337	0,6155	0,5965	0,5773

Resultando $\frac{E}{2}=\frac{0,7071+0,5773}{2}=0,6422$

$$P+I=5,9407$$

$$y$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cong 0,1*6,5829 \cong 0,65829$$

El área aproximada bajo la curva $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en el intervalo $[0,1]$ es de $0,65829cm^2$.

Fórmula de Simpson

En la fórmula de los trapecios, hemos sustituido la curva por una poligonal inscripta. Una mejor forma de aproximación es sustituir la curva por arcos de parábola. La fórmula de Simpson, aproxima el cálculo del área bajo la curva, sustituyendo la curva por una parábola, resultando para el cálculo la siguiente expresión:

$$\acute{A}rea \cong \frac{\Delta x}{3}\left(E+4I+2P\right)$$

teniendo E, I y P significado análogo al descripto para la fórmula de los trapecios.

Por ejemplo, calcularemos: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$; tomando Δx = 0,1 como en el método de los trapecios, podemos hallar *(usando la tabla construida para dicho método)*:

$$E=0,7071+0,5773=1,2844$$

$$4I= 4\left(0,7053+0,6917+0,6666+0,6337+0,5965\right) = 13,1752$$

$$2P =2\left(0,7001+0,6804+0,6509+0,6155\right) = 5,2938$$

$$A\cong\frac{0,1}{3}\left(1,2844+13,1752+5,2938\right)\cong\frac{0,1}{3}*19,7534\cong 0,6584$$

El área aproximada bajo la curva $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en el intervalo $[0,1]$ es de $0,6584cm^2$.

Sugerimos leer del capítulo 10: “Estimación del trabajo que realiza el músculo cardíaco durante un ciclo” y “Cálculo de la fotosíntesis”, donde se vincula la integración estudiada en este capítulo. Y del capítulo 9: “Áreas y volúmenes de piezas arqueológicas”.

Actividad 6

6.1 Aplicando la fórmula de los trapecios, hallar el valor aproximado de las siguientes integrales definidas, tomando un total de 10 intervalos entre los extremos de integración

6.1.1 $\int_0^1 e^{-x^2}\cdot dx=$

6.1.2 $\int_3^5 \frac{dx}{\ln\left(x\right)}=$

6.2 Aplicando la fórmula de Simpson $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{3}(E+4I+2P)$ calcular aproximadamente la longitud de arco de la curva $y = e^x$ en el intervalo [-1,1] $(n = 10)$.

Otro campo de aplicación donde nos puede resultar de suma utilidad la fórmula de Simpson es para calcular el volumen de algún cuerpo o estructura. Como puede encontrarse en el ámbito de las geociencias (Malvić et al. 2014; Slavinić y Cvetković 2016; entre otros) podemos utilizar este método de integración numérica, por ejemplo, para relevar el volumen una estructura arqueológica. Pensemos en una práctica en terreno de un sitio arqueológico donde comienza a excavarse con niveles artificiales de un espesor de 5cm, una cuadrícula en la cual se puede discriminar una estructura de combustión.

Se desea calcular el volumen del fogón teniendo como dato una representación del mismo sobre un plano por medio de un sistema llamado curva de nivel.

Un sistema de este tipo está basado en la proyección sobre un plano de comparación de las intersecciones entre la superficie del sitio y un conjunto de planos paralelos y equidistantes

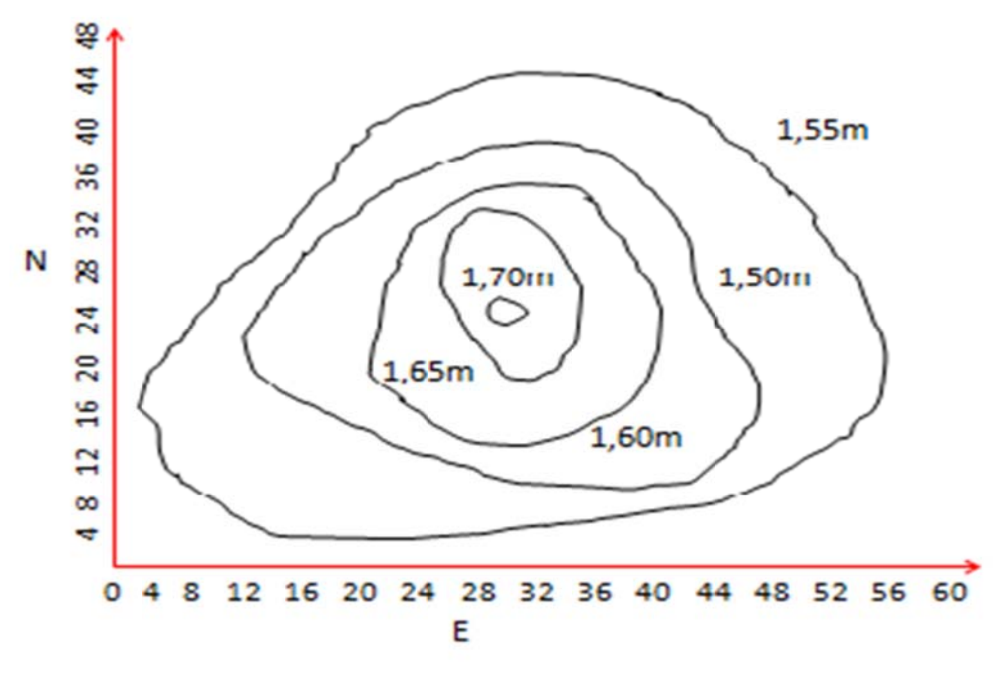
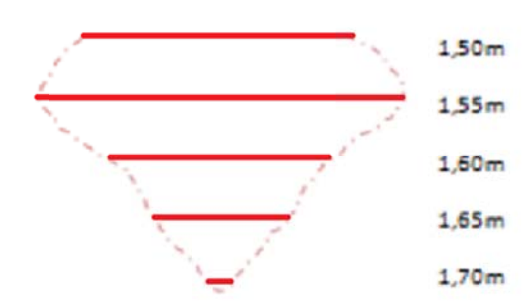


Figura 1

La primera aparición de la estructura de combustión fue evidente a los 150cm de profundidad; a 170cm estaba su límite inferior.

En un corte vertical su forma aproximada es:



Su dispersión fue mapeada mediante el empleo de un sistema cartesiano ortogonal donde los ejes representan los sentidos E y N en la cuadrícula. Los puntos que se reconocieron están remarcados en la Figura 1.

Nos proponemos, como ya dijimos, calcular el volumen aproximado utilizando la fórmula de Simpson. Para lograr el objetivo propuesto debemos calcular primero las áreas de cada una de las superficies encerradas por la curva de nivel. Ver los cuadros I, II, III y IV.

Cuadro I

Profundidad: $z = 150cm$

$n = 10$; $a = 8$; $b = 48$; $h = \frac{b - a}{n} = \frac{40}{10} = 4[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
8	0		
12		11	
16			17
20		22	
24			26
28		28	
32			15
36		21	
40			16
44		12	
48	0		
$\sum$	0	94	74
4I + 2P		376	148

El área a 1,5 m será: $A150 \cong \frac{4}{3}(0+376+148)=698{,}67[cm^2] \cong 7{,}00[dm^2]$

Cuadro II

Profundidad: $z=155cm$

$n=14$; $a=2$; $b=58$; $h=\frac{b-a}{n}=\frac{56}{14}=4[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
2	0		
6		16	
10			24
14		29	
18			35
22		40	
26			42
30		42	
34			42
38		40	
42			37
46		29	
50			25
54		18	
58	0		
Σ	0	214	205
4I + 2P		856	410

El área a 1,55 m será:

$$A155 \cong \frac{4}{3}(0+856+410)=1688[cm^2] \cong 16{,}9[dm^2]$$

Cuadro III

Profundidad: $z=160cm$

$n=6$; $a=16$; $b=40$; $h=\frac{40-16}{6}=4[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
16	0		
20		12	
24			18
28		20	
32			14
36		12	
40	0		
Σ	0	44	32
4I + 2P		176	64

El área a 1,60 m será:

$$A160 \cong \frac{4}{3}\left(176 + 64\right) = 320[cm^2] \cong 3{,}2[dm^2]$$

Cuadro IV

Profundidad: $z = 165cm$

$n = 6$; $a = 24$; $b = 36$; $h = \frac{36 - 24}{6} = 2[cm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
24	0		
26		6	
28			8
30		7	
32			5
34		3	
36	0		
Σ	0	16	13
4I + 2P		64	26

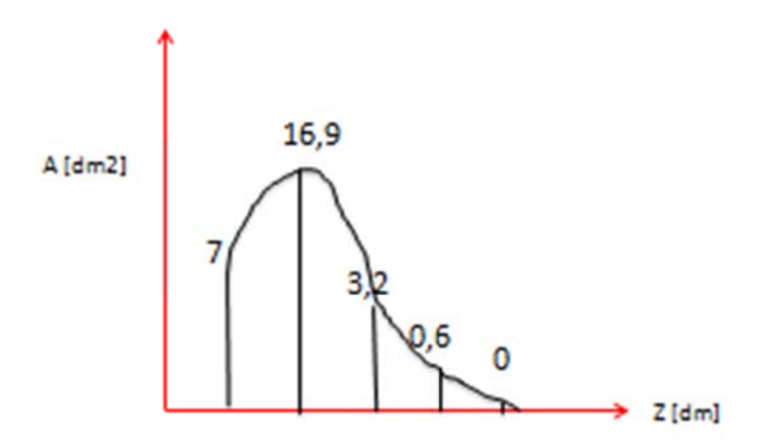
El área a 1,65 m será:

$$A165 \cong \frac{2}{3}(64+26) = 60[cm^2] = 0{,}6[dm^2]$$

$$A170 \cong 0$$

Cálculo del volumen

Para comprender el procedimiento que seguiremos para hallar el volumen, volquemos los resultados obtenidos sobre un gráfico en el cual sobre el eje de ordenadas anotamos las áreas de las curvas de nivel en dm^2 y sobre el eje de abscisas las cotas del fogón en dm.



La integral definida:

$V = \int_{15}^{17} A(z) \cdot dz$ nos dará el volumen buscado.

Aplicando Simpson con:

$n = 4$; $a = 15$; $b = 17$; $h = \frac{17-15}{4} = 0{,}5[dm]$

ABSCISAS	ORDENADAS		
	E	I	P
15,0	7,0		
15,5		16,0	
16,0			3,2
16,5		0,6	
17,0	0		
Σ	7,0	17,5	3,2
4I + 2P	7,0	70,0	6,4

El volumen de manera aproximada será:

$$V \cong \frac{0,5}{3}(7 + 70 + 6,4) \cong 13,9[dm^3]$$

Bibliografía

Berio, A. y otros. (2011). *Matemática 2 Activa*. (1ª ed). Argentina. Puerto de Palos.

Larson, R. (2001). *Cálculo y geometría analítica. (6ª ed).* México. Programas Educativos S.A.

López C (2005). *Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática*. Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Malvić T., Rajić R., Slavinić P. y K. Novak Zelenika (2014). Numerical integration in volume calculation of irregular anticlines. *The Mining-Geological-Petroleum Engineering Bulletin* 29 (2):1–8.

Slavinić P. y M. Cvetković (2016). Volume calculation of subsurface structures and traps in hydrocarbon exploration – A comparison between numerical integration and cell based models. *Open Geosciences* 8:14–21.

Smith, S. (1998). *Algebra, trigonometría y geometría analítica.* Naucalpan de Juárez: Addison Wesley.

CAPÍTULO 6
Nociones sobre Ecuaciones Diferenciales

Romina Herrera y Verónica Amor

Existe una relación conocida desde hace muchos años, entre la temperatura y el ritmo con el que los grillos chirrían: una mayor frecuencia de los chirridos indica una temperatura más alta. En 1898, A.E. Dolbear comprobó que los grillos chirrían en el campo de forma sincrónica y publicó un trabajo en el que proponía una fórmula que relacionaba linealmente la temperatura (T) en ^{0}F con el número de chirridos de los grillos (N). La fórmula es:

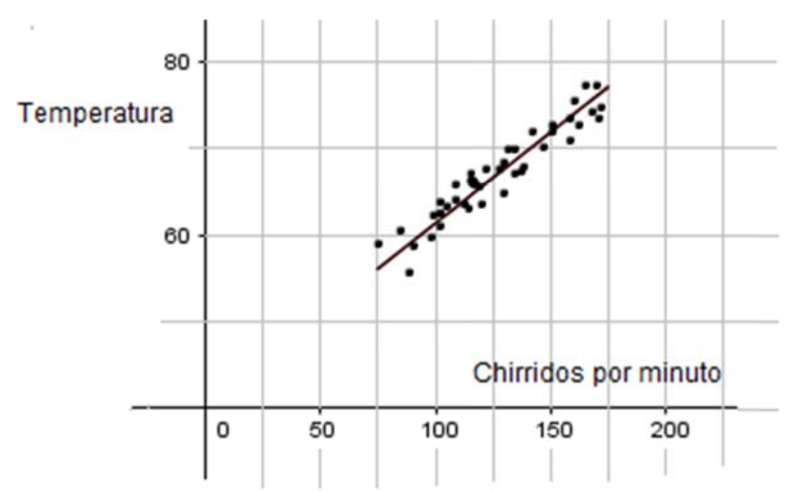
$$\mathrm{T} = 50 + \frac{N-40}{4}$$

Otros autores publicaron trabajos similares. Por ejemplo, se encontró esta relación:

$T = 0.21N + 40.4$, que es muy parecida a la propuesta por Dolbear.

Estos modelos matemáticos representan a la temperatura como una función de la frecuencia de los chirridos de los grillos.

La siguiente gráfica muestra cómo se ajusta la recta propuesta a los datos, representados por los puntos.



Si comparamos el modelo de Dolbear con la ecuación encontrada observamos ligeras diferencias entre los coeficientes, pero esto podría deberse al tipo de grillos que se analizó. Sin embargo, si comprobamos que las observaciones de dos clases de grillos diferentes son muy parecidas, entonces el modelo puede ser un buen termómetro biológico. A la hora de su aplicación, su uso está limitado, ya que los grillos sólo chirrían durante unos pocos meses al año y además cuando la temperatura es superior a 10^{0}C.

Modelos matemáticos

La Matemática es muy útil para investigar fenómenos; como el movimiento de los planetas, la desintegración de sustancias radiactivas, la velocidad de las reacciones químicas, los patrones meteorológicos, la dinámica de poblaciones, entre otros.

Con frecuencia se quiere predecir el comportamiento de un fenómeno o de un proceso tomando como punto de partida los valores actuales. Aparecen así ecuaciones que relacionan la función desconocida y una o alguna de sus derivadas. Este tipo de ecuaciones se llaman **ecuaciones diferenciales**. Cuando la ecuación diferencial se utiliza para describir un fenómeno físico, decimos que es un **modelo matemático**.

Un modelo representa aspectos relevantes de una situación que se quiere estudiar. Cuando se emplea el lenguaje matemático decimos que es un modelo matemático. Veamos algunos ejemplos de estos modelos que utilizan ecuaciones diferenciales.

Si $y = f(x)$ es una función que relaciona las variables x e y, entonces su derivada $y' = \frac{dy}{dx}$, nos indica la tasa de cambio o velocidad de cambio de la variable y con respecto a la variable x.

Les presentamos algunos modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales que utilizaremos para describir distintas situaciones.

Modelo del tipo $\mathbf{f' = kf}$

La expresión establece que la primera derivada de la función es proporcional a la función. Veamos qué situaciones puede modelizar.

Ejemplo 1

Consideremos poblaciones de idénticos individuos, cuya razón de reproducción no depende del tiempo y es igual para cada uno. (Podemos pensar que se reproducen por bipartición). Suponemos en este caso que los individuos no interfieren entre sí, no se mueren y tienen recursos suficientes para subsistir.

La rapidez con que la población crece es proporcional a la población presente en cada instante, la expresión para describir esto será:

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{kP}$$

Veamos los elementos de la ecuación diferencial:

$\frac{dP}{dt}$ es la expresión de la velocidad de crecimiento de la población (la derivada de la función).

P representa la cantidad de población en el tiempo t: P=P(t) (la función).

k es la constante de proporcionalidad que nos indica la razón de crecimiento o decrecimiento de la población.

La resolución de la ecuación consiste en encontrar una función P que verifique que su derivada es un múltiplo de ella. ¿Qué tipo de funciones tienen esta característica?

Ejemplo 2

Una sociedad protectora de animales necesita trasladar un león marino a otra ciudad. El animal irá cubierto durante el viaje con una manta mojada. En cualquier tiempo t, la manta perderá humedad debido a la evaporación, a una razón proporcional a la cantidad de agua presente en la manta.

Llamando $A(t)$ a la cantidad de agua en la manta en el tiempo t, la razón de cambio de $A'(t)$, será proporcional a $A(t)$. Es decir:

$$A'(t) = k\,A(t)$$

donde la constante de proporcionalidad k es negativa, ya que la cantidad de agua disminuye con el tiempo. Inicialmente, la manta contendrá 42 litros de agua de mar .Por lo tanto, el modelo será:

$$A'(t) = k\,A(t),\ k \leq 0,\ A(0) = 42$$

La incorporación de la condición de k y el valor inicial son consecuencia de la situación particular que se describe.

Ejemplo 3

Todas las sustancias tienen la propiedad común que la velocidad de descomposición radioactiva en cada instante es proporcional a la cantidad de sustancia existente en ese instante.

Deseamos encontrar una función $y = f(t)$ que nos exprese la masa existente de la sustancia al cabo del tiempo t.

Si expresamos la velocidad de descomposición como $\frac{dy}{dt}$ entonces:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

donde k>0 se llama constante de desintegración. El signo negativo de la derivada de la masa, respecto del tiempo, indica que la función cantidad de masa está decreciendo.

Modelo del tipo $\mathbf{f}' = \mathbf{kF}(\mathbf{f})$

Ahora consideramos poblaciones que comienzan creciendo exponencialmente pero luego se nivelan hacia un valor máximo M. Es decir: $\frac{dP}{dt} \approx aP$ si P es pequeña (esto sucede al inicio) y $\frac{dP}{dt} \to 0$ si la población tiende a la capacidad de contención del espacio y los recursos.

En este modelo suponemos que la razón de crecimiento no es constante, depende del tamaño de la población, es decir, esta velocidad es función de la población. Lo podemos expresar así: $\frac{dP}{dt} = F(P)$

Si la rapidez de crecimiento es proporcional al tamaño de la población y a la diferencia entre población máxima y población existente, la expresión será:

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{kP(M - P)}$$

Esta ecuación se llama ecuación logística diferencial.

Si la población es nula no puede crecer, es decir P(t)=0 es una solución de la ecuación. Si la población llegó al límite, M, tampoco puede crecer, es decir P(t)=M también es solución de la ecuación.

Si la población inicial está entre 0 y M, la población crece ya que M-P será positivo, quedando la derivada positiva.

Si la población inicial sobrepasa M, M-P será negativa y la población decrecerá.

Estos tipos de modelos analizan las variables que intervienen como continuas. Esto es posible cuando las poblaciones son muy grandes y se reproducen continuamente con las generaciones sucesivas, superponiéndose unas con otras.

Sugerimos leer del capítulo 10: el modelo mínimo de "Estudio de la diabetes", donde se vincula las ecuaciones diferenciales que estudiaremos en este capítulo.

Conceptos básicos de ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que incluye expresiones o términos que involucran a una función matemática (que desconocemos) y alguna de sus derivadas.

Simbólicamente se puede escribir:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

Siendo x la variable independiente, la función $y = f(x)$ y sus derivadas $y', y'', \dots$

Si la función desconocida es de **una sola variable independiente**, la ecuación se llama **ordinaria**.

El **orden de una ecuación diferencial** es el mayor orden de la derivada que contiene una ecuación diferencial.

Se denomina **grado de la ecuación** al exponente de la derivada de mayor orden.

En este libro trabajaremos con ecuaciones diferenciales ordinarias.

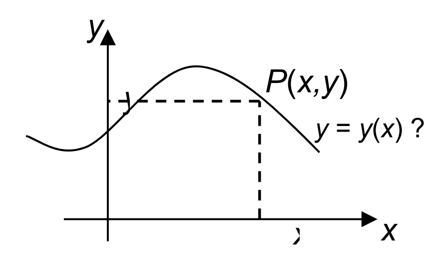
Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

$$y' + 3xy = 0 \quad \text{orden 1} \quad \text{grado 1}$$

$$xy''' - 4y' + x^3y = cosx \quad \text{orden 3} \quad \text{grado1}$$

$$\frac{dy}{dx} + x^2y + x = 0 \quad \text{orden 1} \quad \text{grado1}$$

Si no preguntamos ¿cuáles serán las curvas que verifican que la pendiente en cada uno de sus puntos es igual al doble de la suma de las coordenadas del punto? La condición se puede plantear de esta manera:



$$\frac{dy}{dx} = 2\ (x + y)$$

$$y' = 2\ (x + y)$$

derivada de la función *y* — variable independiente — función desconocida

Solución de una ecuación diferencial

La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada condición expresada en la ecuación diferencial.

Nos centraremos en las ecuaciones diferenciales de primer orden $F(x;\ y;\ y') = 0$

Si pensamos en las ecuaciones que conocemos, las soluciones de la misma, como por ejemplo la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ será {1, 3}; ya que verifican la igualdad.

En las ecuaciones diferenciales, no buscamos números reales que verifiquen la igualdad, sino que buscamos funciones que cumplan esa condición.

El proceso de determinar todas las funciones que son soluciones de una ecuación diferencial, es resolver la ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial tiene generalmente un número infinito de soluciones que recibe el nombre de **solución general**. En ocasiones, se desea encontrar una **solución particular** que satisfaga ciertas condiciones adicionales llamadas condiciones iniciales. Las condiciones iniciales especifican los valores de una solución y de cierto número de sus derivadas en un valor concreto de la variable x.

Verifiquemos que la función $y = \frac{1}{x}$ es solución de la ecuación $y' + \frac{y}{x} = 0$

Derivamos la función dada: $y' = -\frac{1}{x^2}$

Reemplazamos en la ecuación diferencial la función y su derivada:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}}{x} = 0 \rightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{x} = 0 \rightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Se verifica la igualdad, por lo tanto, $y = \frac{1}{x}$ es solución de la ecuación diferencial dada. ¿Es la única solución?

Actividad 1

1.1 Probar que las funciones $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 + C$ son soluciones de la ecuación $y' = 2x$

1.2 Probar que las funciones $y = 2e^x$, $y = C_1e^x$ con C_1 constante son soluciones de la ecuación $y' = y$

Valores iniciales

Podemos enunciarlo de la siguiente manera: $y' = f(t; y)$ y los valores iniciales están dados por $y(t_0) = y_0$

Estamos interesados en saber si dicho problema tiene solución y en caso afirmativo si ésta es única.

Veamos el ejemplo:

La ecuación diferencial $ty' + y = 1$ admite como solución general $y = \frac{c}{t} + 1$, $c \in$ R, en cualquier intervalo que no contenga al cero. Para verificarlo, derivamos la función *y*(*t*):

$$y' = -\frac{c}{t^2} \rightarrow ty' + y = -\frac{c}{t} + \frac{c}{t} = 1$$

Si queremos determinar la solución que pasa por el punto (1*;* 2) tenemos que imponer la condición *y*(1) = 2. El valor de *c* que cumple con el requisito anterior es *c* = 1, con lo cual la solución particular pedida es: $y = \frac{1}{t} + 1$

En consecuencia, la función es una solución del problema de valores iniciales:

$ty' + y = 1$ con *y*(1) = 2 .

Como en $y = \frac{c}{t} + 1$, c∈R, están todas las soluciones de la ecuación diferencial $ty' + y = 1$, entonces el problema particular tiene solución única.

En cambio, no es posible encontrar una solución que pase por el punto (0*;* 2). En este caso diremos que el problema de valores iniciales ty´+y = 1*; y*(0) = 2*;* no tiene solución.

De manera más formal podemos decir:

Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(x)$. Si la función f es continua en algún intervalo $I \subseteq R$, se tiene que: $y = \int f(x)dx + C$ siendo C una constante real arbitraria, de donde resulta que la ecuación diferencial dada tiene una familia finita de soluciones. La solución contiene una constante arbitraria que puede determinarse, si se conoce $y(x_0) = y_0$.

De lo expresado anteriormente, podemos decir que la integración es una forma de resolución de ecuaciones diferenciales.

Actividad 2

Una curva en el plano xy verifica que su pendiente en cualquier punto (x;y) de la misma es igual a 3x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2;1).

Ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables

Son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma:

$$y' = g(x) \cdot h(y) \qquad (1)$$

Es decir, es el producto de una función que depende únicamente de x por otra función que depende únicamente de *y*.

Para resolverla tenemos en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$ entonces la ecuación (1) puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = g(x).h(y)$$

De donde para todo y , tal que $h(y) \neq 0$ se tiene que:

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx$$

Si $g(x)$ y $\frac{1}{h(y)}$ son continuas, integramos ambos miembros, entonces

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx$$

Si $H(y)$ es una primitiva de $\frac{1}{h(y)}$ y $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$, resulta:

$$H(y) = G(x) + C \;\;,\;\; C \in \mathbf{R}$$

es la solución general de la ecuación (1).

Esta última igualdad define implícitamente a *y* como función de *x*; si es posible, obtendremos a *y* en términos de *x*.

Por ejemplo, resolvamos la siguiente ecuación $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$; siendo y(0)=1

$$(1+e^x)\; y\; y' = e^x \;\rightarrow\; (1+e^x)\; y\; \frac{dy}{dx} = e^x \;\rightarrow\; y\; dy = \frac{e^x}{1+e^x}\; dx \rightarrow \int y\; dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\; dx$$

$\frac{1}{2}y^2 = ln(1+e^x) + C,\;\; C \in \mathbf{R} \;\;\rightarrow y^2 = 2\; ln\; (1+e^x) + C\;,\; C \in \mathbf{R}$, de donde:

$y = \pm\sqrt{2\; ln\; (1+e^x) + C}$: solución general en forma explícita.

Aplicamos ahora la condición inicial

$$y\;(0) = 1 \xrightarrow{y>0} 1 = +\sqrt{2ln(1+e^0) + C} \;\;\rightarrow\;\; 1 = 2\; ln\; 2 + C \;\;\rightarrow\;\; C = 1 - 2ln\; 2$$

Operando algebraicamente, la solución particular es $y = \sqrt{2ln\frac{1}{2}(1+e^x) + 1}$

Otro ejemplo:

Para resolver la ecuación $xy' - 4y = 0$; con y(0)=0

Solución:

$$x\,y' - 4\,y = 0 \;\rightarrow x\;\frac{dy}{dx} = 4\,y \xrightarrow{\;y\neq 0\;} \frac{dy}{y} = 4\frac{dx}{x} \rightarrow \int\frac{dy}{y} = 4\int\frac{dx}{x} \;\rightarrow ln|y| = 4\,ln\,x + C,\; C \in \mathbf{R}$$

de donde y= Cx^4 con $C \neq 0$

Verificamos que $y = 0$ también es solución de la ecuación diferencial dada, entonces la solución general será $y = C x^4$ con $C \in R$.

Aplicando la condición inicial tenemos que 0=C.0, esta igualdad se verifica independientemente del valor de *C*, es decir para todo *C*, por lo que tiene infinitas soluciones.

La desintegración radiactiva es una situación que se describe con ecuaciones diferenciales. Vamos a resolver la ecuación presentada como modelo anteriormente. Retomamos lo dicho:

Todas las sustancias tienen la propiedad común de que la velocidad de descomposición radioactiva es en cada instante proporcional a la cantidad de sustancia existente en ese instante.

Deseamos encontrar una función $y = f(t)$ que nos exprese la masa existente de la sustancia al cabo del tiempo t.

Si expresamos la velocidad de descomposición como $\frac{dy}{dt}$ entonces $\frac{dy}{dt} = -ky$ donde k>0 se llama constante de desintegración. El signo negativo de la derivada de la masa respecto del tiempo, indica que la función cantidad de masa está decreciendo.

Luego, separando las variables obtenemos: $\frac{dy}{y} = -k\, dt$

e integrando miembro a miembro $\int \frac{dy}{y} = -k \int dt \rightarrow \ln\, y = -kt + c$

Por definición de logaritmo: $y = e^{-kt+c}$ y aplicando producto de potencias de igual base se obtiene: $y = e^{c} \cdot e^{-kt}$

Donde e^c representa la masa de la sustancia existente en el instante inicial. Es un modelo de decrecimiento exponencial.

Sugerimos verificar la solución de la ecuación diferencial del capítulo 10: “Estudio de la propagación de la infección por Trypanosoma cruzi”, para los triatominos.

Actividad 3

En las sustancias radiactivas, la variación del número de determinado átomo en el tiempo es proporcional al número de átomos existentes en ese instante.

3.1 Teniendo en cuenta que la variación de la cantidad de átomos es siempre una disminución, y llamando λ a la constante de proporcionalidad, escribir la ecuación diferencial que relaciona el número de átomos N con el tiempo t.

3.2 Suponiendo que originalmente existen N_o átomos, hallar la función que representa el número de átomos presentes en determinado instante.

3.3 El isótopo ^{87}R del rubidio decae en ^{85}R al cabo de un cierto tiempo, siendo $\lambda = 1{,}42\ 10^{-11}$ años^{-1}. Hallar el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad original de átomos de una muestra se reduzca a la mitad.

Actividad 4

Sea una población cuyo máximo es M individuos.

4.1 Escribir la ecuación que representa el crecimiento de la población suponiendo que es proporcional al número de individuos y a la diferencia entre el valor máximo M y la cantidad de individuos.

4.1.1 Esta ecuación se resuelve por el método de reducción a factores simples y la solución resulta de la forma $N(t) = \frac{M}{1+Ce^{-kMt}}$, C constante de integración. Demostrar que efectivamente la población no supera los M individuos.

4.1.2 Representar gráficamente la función N(t) para el mismo valor de M y C y dos valores diferentes de k (arbitrarios). ¿Qué unidades tiene k y cómo influye en la estabilización de la población?

Actividad 5

Con frecuencia la secreción de hormonas en la sangre es una actividad periódica. Si una hormona se segrega en un ciclo de 24 horas, entonces la razón de cambio del nivel de hormona en la sangre se puede modelar por el problema de valor inicial:

$$y'(t) = a - b\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - kt \; ; \qquad y_{(0)} = y_0$$

donde y(t) es la cantidad de hormona en la sangre en el instante t,

a es la razón promedio de secreción,

b es la cantidad de variación diaria en la secreción,

k es una constante positiva que representa la razón con la que el cuerpo elimina la hormona de la sangre, y

y_0 la cantidad de hormona en la sangre en el instante inicial.

Hallar la cantidad de hormona en la sangre en cada instante si $a = b = 1$; k = 2 e inicialmente no había hormona en la sangre.

Bibliografía

Aranda Iriarte, José Ignacio (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales I. Universidad Complutense de Madrid.

Boyce, William, Diprima, Richard C. (1989) Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera. Tercera edición. Sexta reimpresión 1989.Editorial LIMUSA. México

Campbell y Haberman (1998). Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera. McGraw-Hill.

Carmona J, Isabel (2011). Ecuaciones Diferenciales. Pearson Educación de México, S.A. de C.V. Quinta edición. México.

Engler, Adriana et ál (2012). El cálculo Integral. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina. Ediciones UNL. Cap.6.

Simmons, George F. (1993) “Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas”; Editorial Mc Graw Hill.

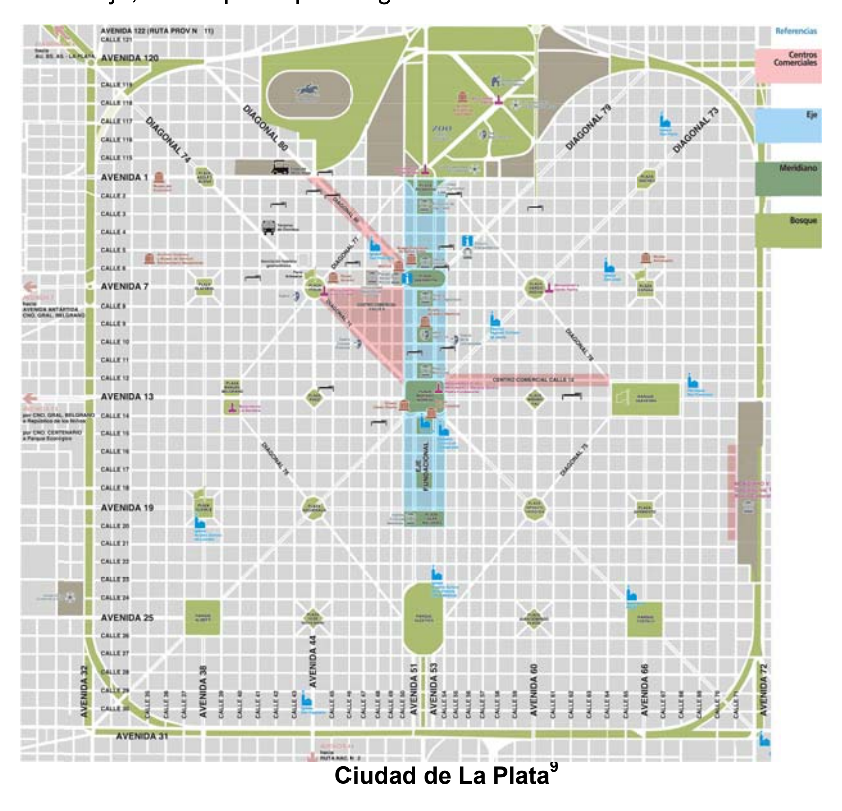
Universidad de Jaen (2009) Modelos matemáticos en Biología. Pág. 6 .Universidad de Jaen

Zill Denis(2006). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. Séptima Edición. Thomson learning.

CAPÍTULO 7
Vectores

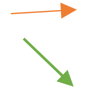
Jimena Lorenzo

Un automóvil verde se desplaza por calle 7 y lo hace desde la calle 54 hasta Plaza Rocha. Otro automóvil naranja, se desplaza por diagonal 73 desde Plaza Moreno hasta Plaza Rocha.



Ciudad de La Plata[9]

El trayecto de cada uno de los autos está representado por un **vector**.



Un **vector** es un segmento orientado que tiene un origen y un extremo.

Para referirnos a un vector podemos hacerlo indicando su origen y extremo: $\overrightarrow{OP}$

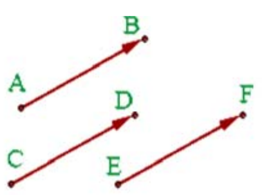
O dándole un nombre con una letra: $\vec{a}$

Todo vector está caracterizado por una **dirección**, un **sentido** y un **módulo**.

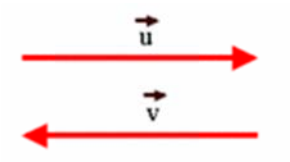
La **dirección** de un vector está dada por la recta que lo contiene (sobre la calle por la cual circula el automóvil). El **sentido** de un vector está indicado por la orientación de la flecha (sentido de la calle sobre la que circula el auto). El **módulo** es la longitud o medida del vector (en este ejemplo en particular es la longitud del recorrido total que realiza el auto).

[9] http://www.laciudad.laplata.gov.ar/turismo/accesos-y-planos/planodelaciudad

Los vectores que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo se llaman **vectores equipolentes**.

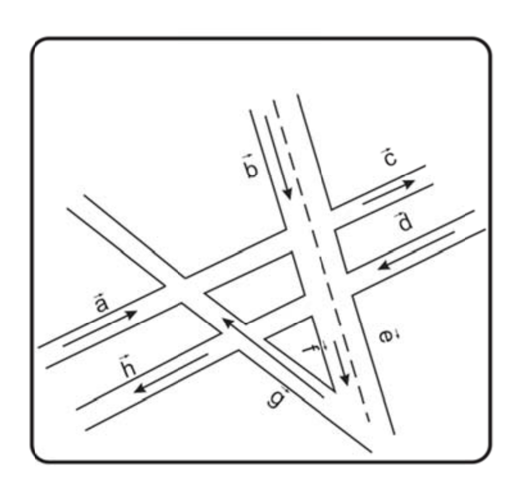


Si dos vectores tienen la misma dirección, el mismo módulo, pero sentido contrario, se dice que son **vectores opuestos**.



Actividad 1

En el siguiente mapa aparecen vectores que representan la trayectoria de distintos automóviles.



Indicar todos los vectores que cumplen con cada una de las siguientes condiciones.

1.1 Automóviles que se desplazan en el mismo sentido.

1.2 Automóviles que se desplazan en sentidos opuestos y recorren la misma distancia.

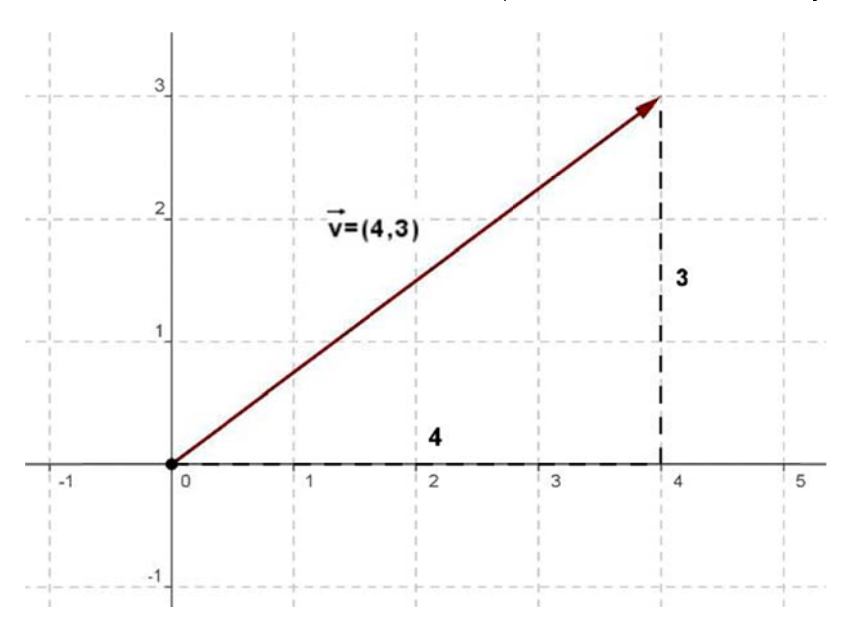
1.3 Automóviles que circulan en la misma dirección.

1.4 Automóviles que se desplazan en la misma dirección, el mismo sentido y recorren la misma distancia

Los vectores también suelen utilizarse para mostrar datos de manera ordenada. La operatoria entre vectores resulta conveniente para su tratamiento. Cuando la cantidad de datos es pequeña, las operaciones básicas entre ellos pueden resolver distintos problemas.

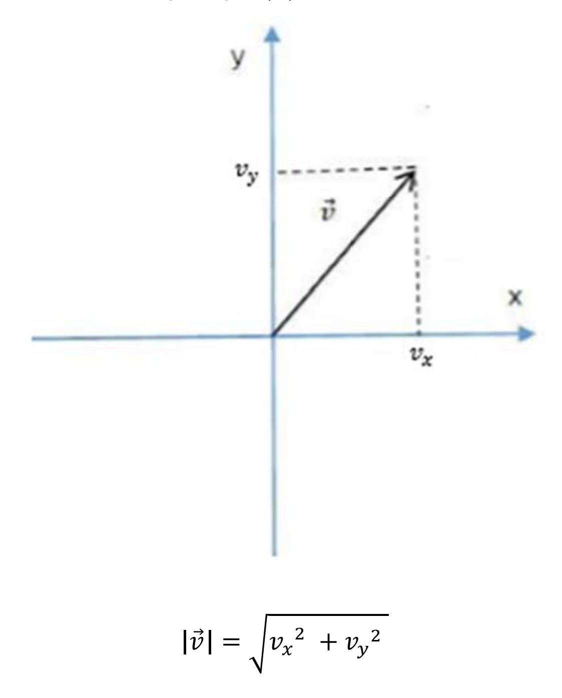
Vectores referidos al origen de coordenadas

Representamos un vector $\vec{v}$, de forma que el origen del vector coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesiano, se obtiene una **representación canónica.**
Las coordenadas del extremo coinciden con las componentes del vector. Por ejemplo:



Módulo de un vector

El módulo de un vector se calcula mediante el Teorema de Pitágoras. Como el módulo es la longitud de un segmento, resulta siempre que $|\vec{v}| \geq 0$



$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Para un vector $\vec{v}$= (4;3), su módulo es $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Operaciones entre vectores

Suma de vectores

Las componentes del vector suma, son iguales a la suma de las componentes de los dos vectores sumados.

$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

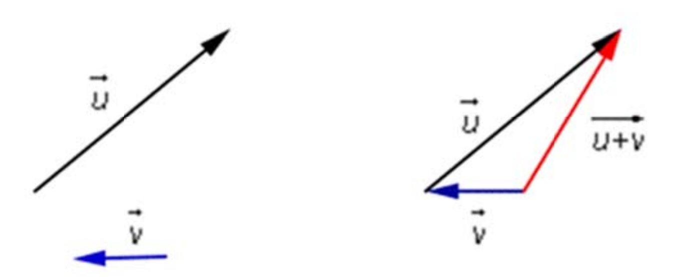
$$\vec{u} = (u_x; u_y)$$

$$\vec{T} = (v_x + u_x;\ v_y + u_y)$$

La suma de dos vectores puede obtenerse gráficamente utilizando algunos de los siguientes métodos

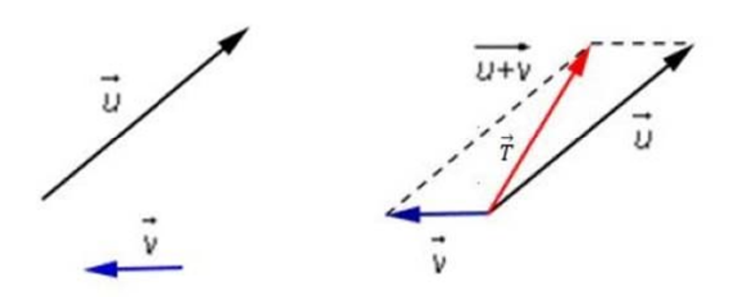
Método de la Poligonal

Se traslada $\vec{u}$ a continuación de $\vec{v}$, haciendo coincidir el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$. El vector resultante o vector suma $\vec{T}$ es el que tiene el origen de $\vec{v}$ y el extremo de $\vec{u}$.



Método del Paralelogramo

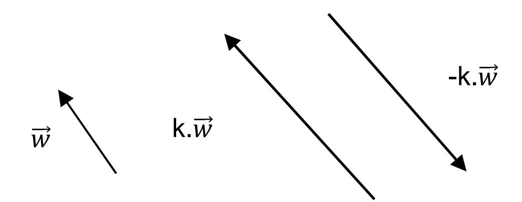
Se hace coincidir los orígenes de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$. Luego se construye un paralelogramo que tiene como lados a los dos vectores. El origen del vector suma $\vec{T}$ coincide con el de ambos vectores y su extremo es el vértice libre del paralelogramo formado con dichos vectores.



Producto de un vector por un escalar

Un escalar es un número real.

Si se multiplica a un vector $\vec{w}$ por un número real k, distinto de cero, obtenemos otro vector:

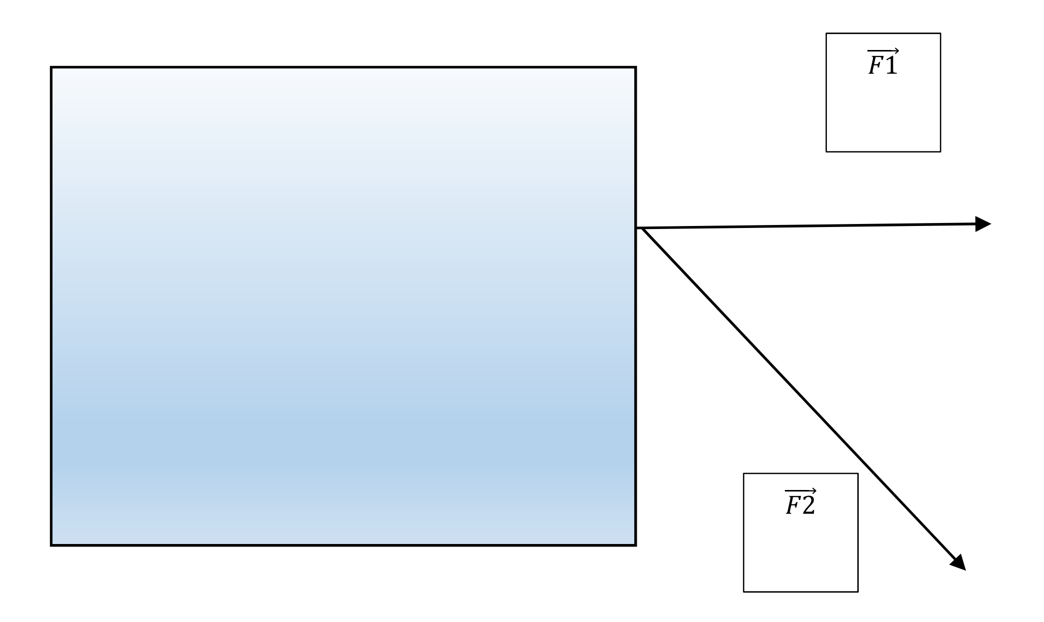


Analíticamente cada una de las componentes del vector $\vec{w}$ se multiplica por el escalar k

Actividad 2

2.1 ¿Cómo podemos resolver la resta de vectores?

2.2 Dos personas tratan de mover una caja tirando de dos sogas. Las fuerzas que ejercen están representadas en la figura mediante vectores. Encuentren gráficamente un vector $\vec{F}$ que represente una fuerza cuyo efecto sea equivalente al de las otras dos juntas.



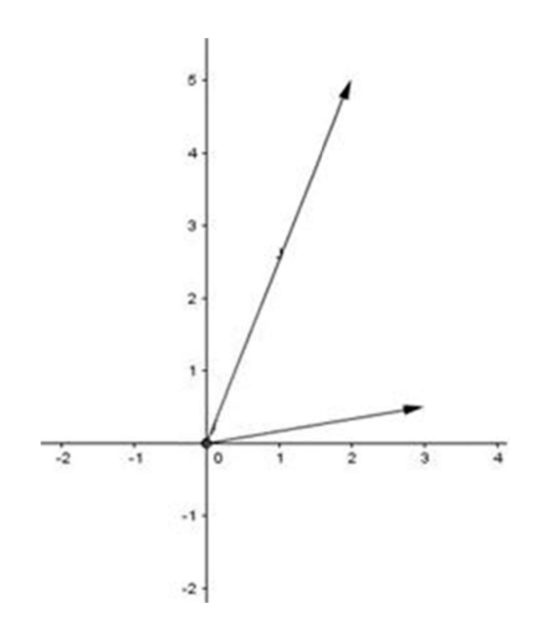
Producto escalar

Se define como: $\vec{v}.\vec{w}=|\vec{v}|.|\vec{w}|.\cos\alpha$

El producto escalar entre dos vectores da por resultado un número real y se calcula, en función de sus componentes, como:

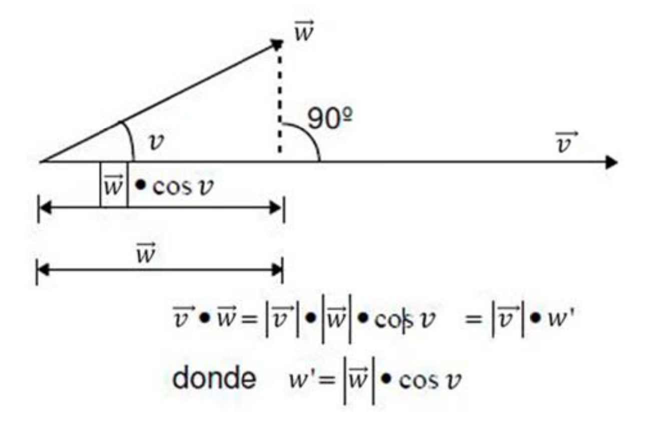
$$\vec{v}.\vec{w}=(v_x;v_y).(w_x;w_y)=v_x.w_x+v_y.w_y$$

Por ejemplo si $\vec{v}$=(2;5) y $\vec{w}$=(3;1/2) entonces v.w = 2.3+5.1/2=17/2

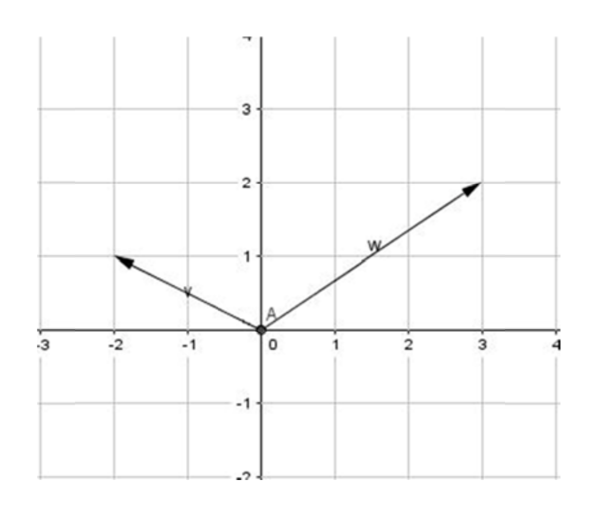


Interpretación geométrica del producto escalar

La definición de producto escalar nos permite interpretar geométricamente esta operación como la proyección de un vector sobre otro.

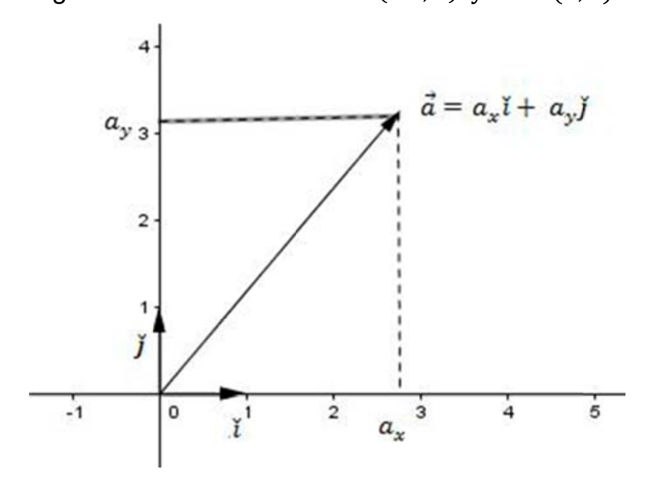


Por ejemplo, si $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ y $|\vec{w}|$=3/2 y el $\hat{\alpha}$=60° podemos calcular el producto escalar de la siguiente manera: $\vec{v}.\vec{w}$=$\sqrt{5}.3/2$ .cos60°=$\frac{3\sqrt{5}}{2}$



Actividad 3

3.1 Calcular el ángulo entre los vectores $\vec{v} = (-2; 1)$ y $\vec{w} = (3; 2)$



3.2 Calcular el producto escalar entre $\vec{v}$ = (2,1) y $\vec{w}$ = (-1,2). ¿Qué podemos concluir a partir del resultado?

Versores

Los vectores que tienen módulo unidad se los llama ***versores***. Comúnmente se los indica con una letra en negrita sobre la que se coloca una v (derecha o invertida) o el símbolo $\check{v}$.

Sobre cada uno de los ejes que forman el sistema cartesiano, con sentido coincidente con el sentido positivo, se superponen los versores denominados versores fundamentales: $\check{\imath}$; $\check{\jmath}$. Sus componentes son: $\check{\imath} = (1; 0)$; $\check{\jmath} = (0; 1)$.

Todo vector $\vec{a} = (a_x; a_y)$ puede escribirse de la forma $\vec{a} = a_x\check{\imath} + a_y\check{\jmath}$

Esta descomposición se llama **forma canónica** de un vector.

3.3 Calcular el producto escalar entre cada uno de los siguientes pares de vectores. Hallar la amplitud del ángulo determinado entre ambos. Graficar.

3.3.1 $\vec{a} = 2\check{\imath} + 5\check{\jmath}$ y $\vec{b} = -3\check{\imath} + 2\check{\jmath}$

3.3.2 $\vec{a} = 2\check{\imath} + \check{\jmath}$ y $\vec{b} = (4, -1)$

3.3.3 $\vec{a} = (-3,2)$ y $\vec{b} = (-3, -4)$

3.3.4 $\vec{a} = 3\check{\imath} + 4\check{\jmath}$ y $\vec{b} = -2\check{\imath} - \check{\jmath}$

Bibliografía

Berio Adriana. (2001). Matematica 1. Buenos Aires: Puerto de Palos

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo

Schaposchnik. (2007). Nueva Carpeta Matemática III. Buenos Aires: Editorial Aique.

CAPÍTULO 8
Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Jimena Lorenzo, Romina Herrera y Viviana Cappello

Matrices

Al utilizar una cantidad considerable de datos se hace necesario organizarlos de alguna manera para que se puedan manipular sin dificultad. Una manera de organizarlos es disponerlos de forma tabular. Esa disposición corresponde a las **matrices**. Éstas conforman un medio para resumir y presentar números que resultan ser los datos de un problema. Son "cajas numéricas" que forman un modelo para muchas aplicaciones de las ciencias sociales, naturales, economía, etc.

En matemática se introdujo la noción de matriz como una tabla de números. Las grandes masas de datos se organizan en esas cajas numéricas. Las matrices se suman, se multiplican por un número, se multiplican entre sí bajo ciertas condiciones.

Por ejemplo

Una empresa consultora está comparando sus datos de admisión para los últimos dos años. Tiene interés en la distribución de aspirantes locales en relación con los extranjeros y en la cantidad por género. Las matrices A y B resumen el número de aspirantes admitidos en los últimos dos años.

$$A = \begin{matrix} & M & F \\ \text{Locales} & 360 & 290 \\ \text{Extranjeros} & 85 & 60 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} & M & F \\ \text{Locales} & 400 & 310 \\ \text{Extranjeros} & 80 & 90 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 360 & 290 \\ 85 & 60 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 400 & 310 \\ 80 & 90 \end{pmatrix}$$

Una **matriz** es un conjunto de números colocados en una determinada disposición, ordenados en filas y columnas. Las líneas horizontales de una matriz se denominan **filas** (locales, extranjeros) y las líneas verticales se denominan **columnas** (masculino, femenino).

A las matrices se las nombra con letras mayúsculas y a los elementos de las mismas con letras minúsculas.

Cuando una matriz contiene m filas y n columnas se dice que es de **orden m x n**. Los elementos de una matriz se suelen encerrar entre paréntesis o corchetes. Las matrices de la situación anterior son de orden 2x2.

Las siguientes matrices son, respectivamente, de orden 3 x 3, 3 x 2, 3 x 4 y 2 x 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz **cuadrada**: Es la que tiene el mismo número de filas y de columnas, es decir de orden $n\ x\ n$ o simplemente de orden n.

De manera general, una matriz de m filas y n columnas cualquiera se escribe de la forma siguiente: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $o\ bien\ A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$ y con $1 \leq j \leq n$

Observamos que el primer subíndice de cada elemento representa el número de la fila y el segundo el número de la columna a la que pertenece dicho elemento. Así a_{ij} es el elemento que está en la intersección de la fila i con la columna j.

La **matriz traspuesta de A**, simbolizada A^t, se obtiene de cambiar ordenadamente filas por columnas de A.

Si A tiene orden mxn entonces A^t tendrá orden nxm

Volviendo al problema anterior vinculado a la admisión en la consultora: si nos solicitan **hallar la admisión total** para cada categoría durante los pasados dos años. ¿Qué operación resuelve la situación que hemos planteado?

Suma de matrices

Sean A y B dos matrices del **mismo orden**, $m\ x\ n$. La suma A + B es otra matriz de orden $m\ x\ n$ cuyos elementos son la suma de los elementos ubicados en la misma posición de las matrices a sumar. La resta A - B se define de forma análoga.

Por ejemplo:

Sí $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; C = A + B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Actividad 1

Hallar la admisión total para cada categoría durante los pasados dos años.

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz A de orden $m\ x\ n$ y un número c, el producto c.A es una nueva matriz $m\ x\ n$ que se calcula multiplicando cada elemento de A por el número c.

Por ejemplo:

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ y el escalar c = 2; la operación

$$2\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.5 & 2.3\\ 2.1 & 2.(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 6\\ 2 & -10\end{pmatrix}$$

Producto entre matrices

El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si A es una matriz $m\,x\,n$ y B es una matriz $n\,x\,k,$ entonces su producto matricial A x B es la matriz $m\,x\,k$ (m filas, k columnas) dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{1p}b_{pk} \\ \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{2p}b_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{p1} & \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{p2} & \dots & \sum_{p=1}^{n} a_{mp}b_{pk} \end{bmatrix}.$$

Si queremos multiplicar A_{2x3} x B_{3x2}, debemos obtener C_{2x2}, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

En la intersección de la fila 1 de la matriz A con la columna 1 de la matriz B se encuentra el elemento c_{11} cuya expresión se obtiene haciendo el producto escalar:

$c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31}$

$c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32}$

$c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23}\, b_{31}$

$c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23}\, b_{32}$

Por ejemplo:

Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{A_{2x3} x\, B_{3x2} = C_{2x2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{10} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

De acuerdo a las definiciones dadas ¿el producto matricial es conmutativo?

Por ejemplo:

Sean $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A_{2x3} \text{ x } B_{3x2} = C_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_{3x2} \text{ x } A_{2x3} = C_{3x3} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 14 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Actividad 2

2.1 La consultora del problema anterior está esperando un aumento de un 20% en las admisiones para cada categoría de estudiantes para el tercer año. ¿Cuál será la nueva planta en la consultora?

2.2 Una compañía manufacturera de televisores LCD HDTV fabricó tres modelos de diferente calidad en tres tamaños distintos. La capacidad de producción (en miles) en la fábrica A está dada por la matriz A.

	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Tamaño 32”	5	3	2
Tamaño 37”	7	4	5
Tamaño 40”	10	8	4

(En otras palabras, la capacidad de la fábrica es de 5000 televisores del Modelo I de 32 pulgadas, 8000 televisores del Modelo II de 37 pulgadas y así sucesivamente).

La capacidad de producción en la fábrica B está dada por la matriz B.

	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Tamaño 32”	4	5	3
Tamaño 37”	9	6	4
Tamaño 40”	8	12	2

2.2.1 ¿Cuál es el total de capacidad de producción de cada modelo y tamaño en las dos fábricas?

2.2.2 ¿Cuál será la nueva producción en la fábrica A si se decide aumentar la producción en un 30%?

2.3. Un negocio tiene para la venta televisores LCD Sony Bravia® de varios tamaños. Tiene 5 de 40 pulgadas; 8 de 37 pulgadas; 4 de 32 pulgadas y 10 de 26 pulgadas. Los de 40 pulgadas se venden a $13950, los de 37 pulgadas a $9999, los de 32 pulgadas a $7950 y los de 26 pulgadas a $6950. Expresar el total de venta de los televisores como un producto de dos matrices e indicar el ingreso total.

2.4 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Hallar si es posible:

2.4.1 $A + B =$

2.4.2 $B - 2A =$

2.4.3 $C + D =$

2.4.4 $A + C =$

Sugerimos verificar del capítulo 10: “Estudio de la propagación de la infección por Trypanosoma cruzi”, donde se efectúa el producto de matrices estudiadas en este capítulo.

Determinantes

Se llama determinante a una función cuyo dominio es el conjunto de todas las **matrices cuadradas** reales, y cuya imagen es el conjunto de los números reales.

Calcular determinantes nos será útil para resolver sistemas de ecuaciones, hallar matrices inversas, etc.

Determinante de una matriz de orden 2

Sea una matriz cuadrada de orden 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Podemos calcular el determinante de la matriz A de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

es decir, la diferencia entre los productos cruzados de sus elementos. El valor obtenido se denota también por det(A).

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.(-2) = 14$

Determinante de una matriz de orden 3. Regla de Sarrus

Sea una matriz cuadrada de orden 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Podemos calcular el determinante de la matriz A de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1.5.10 + (2).6.(-7) + 3.4.8 - 3.5.(-7) - 6.8.1 - 10.4.(-2) = 367$$

Propiedades generales de los determinantes

A continuación, vamos a enunciar una serie de propiedades que cumplen los determinantes de una matriz cuadrada, independientemente del orden que tengan.

- El determinante de una matriz no varía si se cambian filas por columnas, es decir, el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.
  Det(A) = Det(A^t)
- Si una matriz tiene una fila nula, su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c} \end{vmatrix} = abc$$

- Si se intercambian entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 13 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

- Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales su valor es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante queda multiplicado por dicho número.
- Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es cero.
- El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Actividad 3

3.1 Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1000 & 1 \\ 2000 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz C recibe el nombre de **matriz identidad I**. Ésta es el elemento neutro del producto de matrices, al igual que el número 1 en el conjunto de los números reales.

La matriz identidad se caracteriza por tener 1 en su diagonal principal y el resto de sus elementos 0.

Menor complementario

Dada una matriz cuadrada de orden *n*, y uno de sus elementos a_{ij}, se llama menor complementario de dicho elemento, y se representa α_{ij} o M_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila *i* y la columna *j.*

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, el menor complementario del elemento $a_{23}=3$ se calcula de la siguiente forma:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

Adjunto o cofactor

Dada una matriz cuadrada de orden *n,* y uno de sus elementos a_{ij} , se llama adjunto de a_{ij} *y* se representa por A_{ij} al menor complementario precedido del signo + o – según si *i + j* sea par o impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\alpha_{ij}$$

Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

El adjunto del elemento $a_{23}=3$ será $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$.

Y el adjunto del elemento $a_{22}=0$ será $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

Matriz inversa de una matriz cuadrada

La definición de **matriz inversa** que llamaremos A^{-1} es $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$

Vamos a ver cómo podemos calcular la inversa de una matriz cuadrada ayudándonos de los determinantes. Pero previamente vamos a definir el concepto de matriz adjunta.

Una forma práctica para calcular la matriz inversa consiste en utilizar la matriz adjunta de una matriz A.

Dada una matriz cuadrada A, llamamos matriz **adjunta de A**, y la representamos por **adj A** a la matriz formada por los adjuntos de la matriz A.

$$adjA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los adjuntos de los nueve elementos de *A* son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Por lo tanto, la matriz adj A será: $adjA = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Para toda matriz cuadrada *A*, se verifica que $A\cdot(\text{adj } A)^t = (\text{adj } A)^t \cdot A = |A|\cdot I$

Puede comprobarse con la matriz anterior: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ en la que $|A| = -15$

$$A\cdot(\text{adj } A)^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = |A|\cdot I$$

Es decir, el producto de la matriz A por la traspuesta de su adjunta, nos da la matriz identidad I, multiplicada por el determinante de A.

Si $|A| \neq 0$, podemos concluir que:

$$A\cdot\frac{(adjA)^t}{|A|} = I \quad \text{por tanto,} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^t$$

Resumiendo, para calcular la matriz inversa hacemos los siguientes pasos:

1. Se halla el determinante de la matriz A. Si es cero no existe inversa.
2. Se hallan los adjuntos de la matriz dada, para obtener la matriz adj A.
3. Se forma la matriz traspuesta de la matriz adjunta.
4. Se divide la matriz obtenida por el determinante de A.

Por ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.- Hallamos su determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$$

2.- Ahora calculamos la matriz adjunta. Hay que calcular los adjuntos de todos sus elementos. Sabemos, por haberlo hallado anteriormente, que dicha matriz es:

$$adjA = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3.- Calculamos su traspuesta:

$$(adjA)^t = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4.- Por último, dividimos por el determinante de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^t = \frac{1}{-15}\begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/15 & 11/15 & -1/15 \\ -4/15 & -7/15 & 2/15 \\ -6/15 & -3/15 & 3/15 \end{pmatrix}$$

Matrices de incidencia

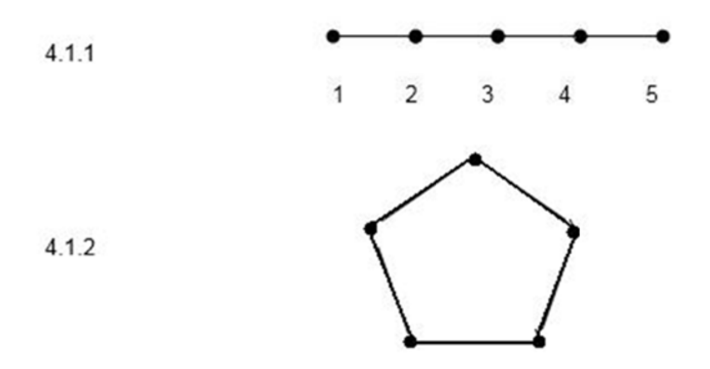
Sea R una relación entre dos conjuntos finitos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ y sea G la gráfica de la relación. Se define la matriz asociada a R por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i,\ y_j) \in R \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

Consideremos los siguientes gráficos, que representan estructuras químicas. En los mismos, los vértices son átomos y las líneas uniones químicas. Formamos una matriz cuadrada de la siguiente forma: los átomos son numerados arbitrariamente, si hay una unión entre cada par de ellos, asignamos un 1, de lo contrario un 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

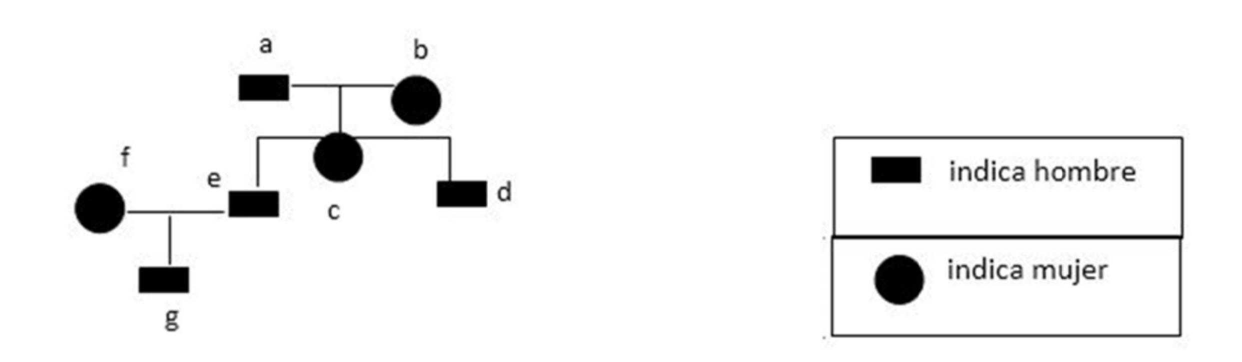
Actividad 4

4.1 Armar las respectivas matrices de incidencia para:

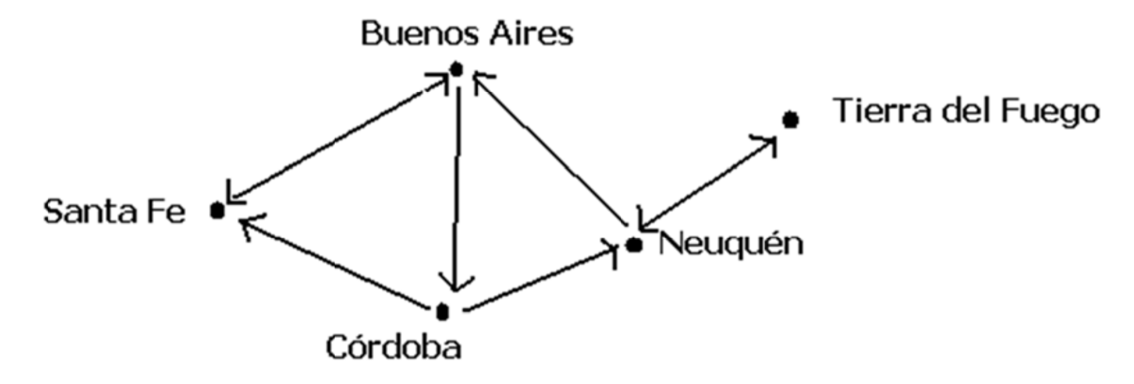


4.2 Sea R:"*x* es descendiente de *y*" R: A→A con $A = \{a, b, c, d. e, f, g\}$

Armar la matriz asociada a la relación ¿Qué interpretación puede darse a la suma de los elementos de una fila? ¿y a la suma de los elementos de una columna?



4.3 Una agencia de viajes analiza distintas opciones para viajar por avión entre cinco provincias. El siguiente esquema indica las conexiones que la agencia puede ofrecer:



4.3.1 ¿De cuántas formas distintas se puede viajar en avión, a través de esta agencia, de Tierra del Fuego a Santa Fé?

4.3.2 ¿Cuál de ellas utiliza la menor cantidad de conexiones?

4.3.3 ¿Qué representa A^2?

4.4 Dado un conjunto de A individuos A_1, A_2, A_3 y A_4, definida por la relación "A_i elige a A_j" es:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

Hallar e interpretar A^2

Sistemas de ecuaciones lineales

En una fábrica de zumos en San Pedro, que se dedica a la exportación, mezcla dos tipos de calidades, una de 0,5 $/l y otra de 0,8 $/l. ¿Cuántos litros de zumo se mezclarán de cada tipo para obtener 120 litros con un costo de $75?

Se determinan las variables:

- x = litros de zumo de calidad 0,5 $/l
- y = litros de zumo de calidad 0,8 $/l

Se plantean las dos ecuaciones.

Se obtienen 120 litros ⇨ x + y = 120

La mezcla tiene un costo de 75 $⇨ 0,5x +0,8y = 75

El sistema es el siguiente: $\begin{cases} x+y=120 \\ 0{,}5\,x+0{,}8\,y=75 \end{cases}$

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten las mismas variables.

Un sistema de ecuaciones de orden 2 (dos ecuaciones y dos variables) es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f son números dados y, x e y son las variables.

Cuando hay más de 3 o 4 ecuaciones y/o variables, se suele utilizar una notación con subíndices para designar tanto las variables como los coeficientes. Así, un sistema lineal de m ecuaciones con n variables se representa, de forma general:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3\ + \dots\dots + a_{1n}\,x_n = b1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}\,x_n = b2 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3\ + \dots\dots + a_{3n}\,x_n = b3 \end{cases}$$

Este sistema se puede escribir de forma equivalente utilizando **notación matricial**:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

designando:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ;\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

simbolizamos: $A \cdot X = B$

Llamando **A** a la matriz m x n de los coeficientes del sistema, **X** a la matriz columna de nx1 de las variables y **B** a la matriz columna de mx1 de los términos independientes del segundo miembro.

Volviendo al problema de la fábrica de zumos, para responder a la pregunta: ¿Cuántos litros de zumo se mezclarán de cada tipo para obtener 120 litros con un costo de $75? Es necesario resolver el sistema planteado, es decir encontrar (si existen) los valores de **x** y de **y** que satisfacen cada una de las ecuaciones planteadas. Una **solución** del sistema es un **conjunto de valores** tales que, al sustituir las variables por estos valores, las ecuaciones se convierten en identidades.

De la 1ra ecuación despejando x se obtiene $x = 120 - y$

Sustituyendo en la 2da la x se tiene

$$0{,}5\,.\,(120 - y) + 0{,}8\,y = 75$$

$$60 - 0{,}5\,y + 0{,}8\,y = 75$$

$$0{,}3\,y = 15$$

$$y = 50$$

El valor de x será $x = 120 - y\,;\ x = 120 - 50, x = 70$

Solución $x = 70, y = 50$.

Se mezclarán 70 litros del zumo de calidad 0,5 $/l; y 50 litros del zumo de calidad 0,8 $/l, para obtener 120 litros con un costo de $75.

¿Los sistemas de ecuaciones lineales siempre tendrán una única solución? Les proponemos analizarlo gráficamente:



(Los gráficos corresponden a sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables).

- Única solución: el sistema es **compatible determinado**.
- Ninguna solución: se dice que el sistema es **incompatible**.
- Infinitas soluciones: el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones. Veremos algunos de ellos:

Regla de Cramer

Se utiliza cuando la cantidad de ecuaciones es igual a la cantidad de variables y el determinante de la matriz de los coeficientes de las variables (llamado determinante principal) es distinto de cero.

Cada variable se obtiene dividiendo el determinante de la variable por el determinante principal: $x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad \forall i, i = 1..n$

El determinante de la variable se obtiene al sustituir en el principal la columna de los coeficientes de la variable por los términos independientes.

Por ejemplo: $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

Calculamos el determinante principal $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -26$

Como $|A| \neq 0$ podemos aplicar la regla de Cramer:

$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-26}$=2 y=-1 z=3

Solución: (2;-1;3)

A modo de conclusión:

- Si $|A| \neq 0 \quad \rightarrow \quad x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$
- Si $|A| = 0 \;\; y \;\; |A_i| \neq 0 \rightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $|A| = 0 \;\; y \;\; |A_i| = 0 \rightarrow$ el sistema será incompatible o indeterminado. Debemos buscar otro método para concluir.

Método de eliminación gaussiana

Realizamos los siguientes pasos:

a) Escribimos la matriz ampliada formada por la matriz de los coeficientes de las variables junto con los términos independientes.

b) Reducimos la matriz por fila a la forma escalonada.

c) Escribimos el sistema equivalente.

d) Despejamos el valor de la última variable y luego se usa la sustitución hacia atrás para obtener las demás variables.

Sigamos los pasos en el ejemplo 1:

Sea el sistema $$\begin{cases} 2\ x_1 - \ \ x_2 + \ x_3 \ = \ 5 \\ x_1 + \ x_2 - \ 2x_3 = \ -3 \\ 3\ x_1 + \ 2\,x_2 - \ x_3 \ = \ 8 \end{cases}$$

Empezamos escribiendo los coeficientes y los términos independientes.

Cálculos a realizar:

	2	-1	1	5
	1	1	-2	-3
	3	2	-1	8
Repetimos la primera ecuación →	2	-1	1	5
	0	3(*1)	−5(*2)	−11(*3)
	0	7(*4)	−5(*5)	1(*6)
Repetimos la primera y la segunda ecuación del paso anterior →	2	-1	1	5
	0	3	-5	-11
	0	0	20(*7)	80(*8)

$$(*1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3$$

$$(*2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-2\right) - 1 \cdot 1 = -5$$

$$(*3)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 5 = -11$$

$$(*4)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$$

$$(*5)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

$$(*6)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$$

$$(*7)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 7 \cdot (-5) = 20$$

$$(*8)\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 7 \cdot (-11) = 80$$

Escribimos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2\ x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 \ = \ 5 \\ \ \ 3\ x_2 - \ 5x_3 \ = \ -11 \\ \ \ \ \ 20\ x_3 \ \ = \ 80 \end{cases}$$

Despejamos el valor de la última variable: $20\ x_3 = 80$ $\boxed{x_3 = 4}$

Vamos sustituyendo: $3\ x_2 - 5\ .\ 4 = -11$

$3\ x_2 = 20 - 11$

$\boxed{x_2 = 3}$

y por último de: $2\ x_1 - 3 + 4 = 5$

$2\ x_1 = 5 + 3 – 4$

$\boxed{x_1 = 2}$

La solución del sistema está dada por la terna (2;3;4). El sistema es **compatible determinado.**

Ejemplo 2: $\begin{cases} 3\ x_1 - \ 5\,x_2 + \ 11x_3 \ = 7 \\ 2\,x_1 + \ 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ x_1 - \ x_2 + 9x_3 \ = -3 \end{cases}$

3	5	11	7
2	3	8	4
1	-1	9	-3
3	5	11	7
0	-1	2	-2
0	-8	16	-16
2	5	11	7
0	-1	2	-2
0	0	0	0

El sistema equivalente es: $\begin{cases} 3\ x_1 - \ 5\,x_2 + \ 11x_3 \ = 7 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ 0x_3 \ = 0 \end{cases}$

El sistema admite infinitas soluciones, que se obtienen dando valores arbitrarios a x_3: por esa razón es **compatible indeterminado**.

Ejemplo 3: $\begin{cases} 4\,x_1 + x_2 - x_3 \ = 6 \\ 2\,x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ 2x_1 + \ 4x_2 - 6x_3 \ = -2 \end{cases}$

4	1	-1	6
2	-4	6	-2
2	4	-6	-2
4	1	-1	6
0	-14	22	32
0	14	-22	-20
4	1	-1	6
0	-14	22	32
0	0	0	-168

El sistema equivalente es: $\begin{cases} 4\,x_1 + x_2 - x_3 \ = 6 \\ 14x_2 + 22x_3 = 32 \\ 0x_3 \ = -168 \end{cases}$

El sistema no tiene solución ya que 0 ≠ -168, es **incompatible**.

Método por inversión de matrices

Sea el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = b1\ (1) \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}x_3 = b2 \quad (2) \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = b3\ (3) \end{cases}$$

Lo escribimos en forma matricial AX=B

Multiplicamos desde la izquierda a ambos miembros de la igualdad por la matriz inversa de A, que simbolizamos como la matriz A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

De acuerdo con la definición de matriz inversa, $A^{-1} \cdot A = I$ y siendo **I** es el elemento neutro en el producto de matrices, resulta:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Esto significa que, para obtener la matriz de las variables (matriz solución) basta con multiplicar la matriz de los términos independientes por la matriz inversa de la matriz de los coeficientes de las variables.

Si recordamos que $A^{-1} = \dfrac{Adj^t}{|A|}$, sólo podremos resolver por inversión de matrices aquellos sistemas en los cuales el determinante asociado a la matriz de los coeficientes de las variables sea distinto de cero, es decir, solamente los sistemas que sean compatibles determinados.

Por ejemplo, para hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + z = \ \ 2 \\ x + 2y - z = \ \ 3 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$ en forma matricial el sistema se escribe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

multiplicamos la matriz de los términos independientes por

$$A^{-1} = \frac{Adj^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}}{10}$$; o sea:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es decir, la terna: $x = 2;\ y = -1;\ z = -3$ es la solución al sistema.

Sistemas Homogéneos

Reciben este nombre los sistemas de ecuaciones lineales que tienen todos los términos independientes nulos. Tienen el aspecto:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23} x_3 = 0 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Se resuelven por cualquier método de los desarrollados. Muchas veces sólo se necesita saber si el sistema es compatible determinado o compatible indeterminado, esto se logra resolviendo el determinante asociado a la matriz de los coeficientes de las variables. Si dicho determinante es distinto de cero, las tres ecuaciones son independientes y la solución es única (la **trivial**); si por el contrario el determinante resulta nulo, el sistema es compatible indeterminado (soluciones múltiples).

Sugerimos leer del capítulo 10: "Balanceo de ecuaciones químicas por el método matricial", donde se efectúa la resolución de un sistema de ecuaciones, estudiadas en este capítulo.

Resolución Matricial de sistemas incompatibles (aplicación del concepto de matriz pseudoinversa)

Sea el sistema de ecuaciones independientes, por lo tanto, incompatible por tener más ecuaciones que variables.

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 = q_1 \quad (1) \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 = q_2 \quad (2) \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 = q_3 \quad (3) \end{cases}$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Simbólicamente:

$$A.x = q$$

Como la matriz A tiene mayor número de filas que de columnas, sólo resulta posible definir su matriz inversa (*en este caso, **pseudoinversa***) por la izquierda.

Para despejar la matriz **X** se multiplican ambos miembros de la igualdad anterior por la matriz traspuesta de A :

$$A^t \cdot A \cdot x = A^t \cdot q \quad (5)$$

"para el ejemplo planteado $A^t(2x3) \cdot A_{(3x2)} = M_{(2x2)}$", tiene dos incógnitas, si hubiéramos hecho $A_{(3x2)} \cdot A^t(2x3) = M_{(3x3)}$ resulta que aparecería una incógnita más de las aparecen en el sistema."

Como la matriz $A^t \cdot A$ es cuadrada, si su determinante asociado es distinto de cero, admite matriz inversa $\left(A^t \cdot A\right)^{-1}$; multiplicando por esta matriz ambos miembros de (5):

$$\left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(A^t \cdot A\right) \cdot x = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot q \quad (6)$$

siendo $\left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot \left(A^t \cdot A\right) = I$ resulta:

$$x = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t \cdot q$$

expresión en la cual $\left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot A^t = L$, L = matriz pseudoinversa por la izquierda

Por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3/2 \\ x_1 + x_2 = 1/2 \end{cases}$$

La primera y última ecuación tienen el primer miembro igual y el segundo miembro distinto, por eso el sistema es incompatible.

Escribimos el sistema en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

multiplicamos ambos miembros por $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

que operando nos conduce a:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenido este sistema de ecuaciones, podemos aplicar cualquier método para resolverlo. Les mostramos cómo queda siguiendo el método de la pseudoinversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

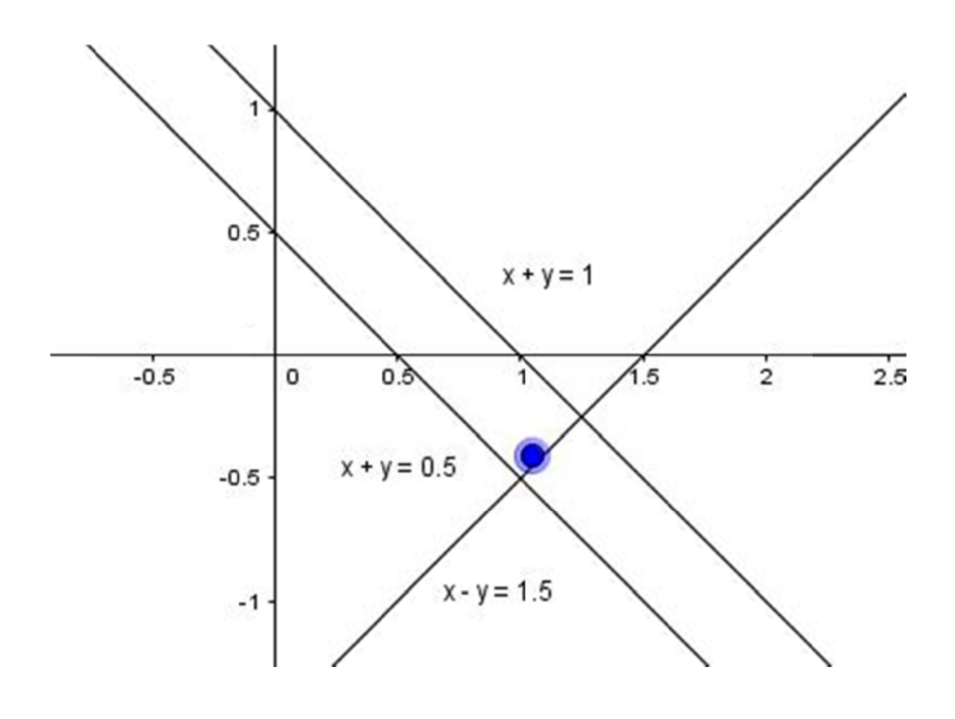
$$I \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & .3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ -3/8 \end{pmatrix}$$

resultando $x_1 = 9/8$ y $x_2 = -3/8$

Estos valores NO SON SOLUCIÓN del sistema original, este era incompatible. Estos valores muestran “el mejor ajuste” para el planteo.



Actividad 5

5.1 Un fabricante de bombillas gana \$0,3 por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde \$0,4 por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de \$484,4. ¿Cuántas bombillas buenas y cuántas defectuosas fabricó ese día?

5.2 Una empresa que fabrica jarrones recibe un encargo para un día determinado. Al planificar la producción se dan cuenta que, si fabrican 250 jarrones al día, faltarían 150 al concluir el plazo que tienen. Si fabrican 260 jarrones diarios, entonces, les sobrarían 80. ¿Cuántos días tienen de plazo y cuántos jarrones le encargaron?

5.3 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

5.3.1 $\begin{cases} 3y + 2x - z = 1 \\ 3x + 2z + 5y = 8 \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases}$

5.3.2 $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 5x - 3y - 7z = 6 = 8 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$

5.3.3 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

5.3.4 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + z = 0 \end{cases}$

5.4 Tres diferentes tipos de insectos se crían juntos en un recipiente de laboratorio. Todos los días se suministran tres tipos diferentes de alimentos. Cada individuo de la especie 1, consume 3 unidades del alimento A, 2 unidades del alimento B y 1 unidad del alimento C. Cada individuo de la especie 2, consume 5 del A, 3 del B y 2 del C. Y la especie C consume, 2 del A, 4 del B y 3 unidades del alimento C. Cada día se suministran 500 unidades del alimento A, 900 del alimento B y 550 del C. ¿Cuántos individuos de cada especie se crían juntos?

5.5 Una empresa multinacional tiene tres minas: una en Ravensthorpe, Australia; otra en Manitoba, Canadá y otra en Piura, Perú. Extrae níquel, cobre e hierro. En Australia extrae el 2% de níquel, el 4% de cobre y el 12 % de hierro. En Canadá 4%de níquel, 10% de cobre y 2% de hierro. En Perú 2% de níquel, 6% de cobre y 2% hierro. ¿Cuántas toneladas de cada mina deben utilizarse para obtener 26 toneladas de níquel, 68 de cobre y 40 de hierro?

5.6 Dados los siguientes sistemas incompatibles ajustarlos por el método de la matriz pseudoinversa. Interpretar geométricamente los resultados.

5.6.1 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

5.6.2 $\begin{cases} 6x - y = 0 \\ 4x + 8y = 2 \\ -2x + 6y = 12 \end{cases}$

Sugerimos leer del capítulo 9: "Sistemas de Geoposicionamiento"

Bibliografía

Anzola, Máximo (1982) Problemas de álgebra. (3a ed.). Madrid. Editorial Madrid

Ayres, J (1991) Teoría y problemas de matrices. México. MacGraw-Hill

Burgos, J (2006) Álgebra lineal. (3a ed.) McGraw-Hill

García Catro, F; Gutiérrez Gómez, A (1981) Algebra Lineal II. Madrid Pirámide

Grossman (1995) Álgebra lineal (5ª ed.) México. MacGraw-Hill

Larson, R y otros (2004) Álgebra lineal Madrid Pirámide

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Rojo, J (2007) Algebra lineal (2a ed.) Madrid. Editorial MacGraw-Hill

Webgrafia

http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/Aplicaciones%20de%20Matrices.htm

CAPÍTULO 9
La Matemática en las Investigaciones Antropológicas Contemporáneas

Guillermo Lamenza

Introducción

Cualquier investigación antropológica contemporánea incluirá alguna operación matemática en parte de su desarrollo metodológico. De manera paradójica es muy difícil encontrar en la producción científica, ya sean artículos en revistas, libros, tesis, presentaciones a congresos, entre otros, casos donde la matemática básica, se muestren de manera explícita. En el mejor de los casos nos encontraremos con la utilización de sofisticadas estadísticas y sistemas informáticos que poco nos muestran la matemática subyacente que permitió dar con los resultados buscados. En este capítulo buscaremos aplicaciones concretas con énfasis en el ámbito de las investigaciones antropológicas desarrolladas desde la Universidad Nacional de La Plata. Tenemos la convicción que este breve recorrido motivará la búsqueda y reconocimiento de la matemática que atraviesan todas las investigaciones, dado que su comprensión desarrolla nuestra capacidad crítica y autonomía como consumidores y generadores de conocimiento científico. Veremos que muchas veces este conocimiento nos permite pensar, abstraer y simbolizar problemas complejos; obtener representaciones, modelar comportamientos, plantear problemas; generar nueva información, y muchas otras cosas más que descubriremos cuando la matemática alimente nuestra creatividad y la búsqueda de respuestas, desde el ámbito que nos ocupa, a través del método científico.

Estimación edad a partir de colecciones osteológicas documentadas

Conocer el comportamiento de diversas funciones también nos son de utilidad para poder describir y explicar relaciones entre variables que representan fenómenos de la realidad que pueden ser objeto de investigaciones antropológicas. A su vez, este conocimiento nos permite, mediante las técnicas estadísticas necesarias, proyectar desde lo conocido a lo desconocido brindando herramientas muy potentes para las investigaciones.

La tesis doctoral de la Dra. Desántolo titulada ¨Validación metodológica para la estimación de edad en restos óseos humanos adultos: análisis histomorfométrico¨ tuvo por objetivo desarrollar una ecuación predictiva para estimar la edad de muerte de un individuo a partir de la medida de alguno de sus huesos largos. La muestra de referencia se conformó con los restos óseos perteneciente a la Colección Osteológica ¨Prof. Dr. Rómulo Lambre¨ alojada en la Facultad de Ciencias Médicas de la Universidad Nacional de La Plata. Para realizar la investigación se identificaron y cuantificaron las variables: número total de osteonas completas (N.On), número de osteonas fragmentarias (N.On.Fg), diámetro promedio de los conductos de Havers (Can.Hav), porcentaje de osteonas fragmentarias (%On.Fg) y la densidad poblacional osteonal (OPD) (Desántolo 2013). Como resultado se encontró que la mayoría de las variables presentan asociación significativa con la edad. De manera específica, a partir de análisis estadísticos multivariados se comprueba que la variable predictiva de la edad para adultos entre 20 a 91 años es el número de osteonas fragmentarias. (Desántolo 2013).

De manera sintética profundizamos sobre los resultados del análisis de regresión lineal múltiple donde se obtuvo la ecuación que sirve para estimar la edad de muerte de un individuo a partir de características cuantitativas en nivel histológico.

$$Edad = (2{,}310) * Número\ de\ osteonas\ fragmentarias\ por\ campo + 30{,}975$$

Si llamamos $x = Número\ de\ osteonas\ fragmentarias\ por\ campo$ e $y = Edad$, la relación lineal antes mencionada se simboliza:

$$y = 2{,}310x + 30{,}975$$

Ecuación de predicción obtenida a partir del análisis de regresión. Modificado de Desántolo (2013)

El importante aporte de esta investigación reside en que, a diferencia de la mayoría de los métodos macroscópicos del esqueleto, este enfoque histomorfométrico ofrece estimaciones precisas y efectivas para adultos mayores, justamente donde los métodos tradicionales pierden precisión. A su vez, esta metodología tiene gran potencial donde los restos se encuentren fragmentados o incompletos, como suele pasar en un contexto bioarqueológico o forense.

Así como el caso anterior encierra un alto potencial de aplicación para el estudio de la población adulta en el ámbito local también hay investigaciones abocadas a otros rangos etarios. Por ejemplo, la tesis doctoral de la Dra. García Mancuso titulada “Análisis bioantropológico de restos esqueletales de individuos subadultos. Diagnóstico de edad y sexo, validación técnico metodológica” tuvo por objetivo principal evaluar diferentes metodologías para estimar la edad y sexo en restos óseos de individuos subadultos. Para su realización se utilizaron materiales esqueléticos pertenecientes a la Colección Osteológica Prof. Dr. Rómulo Lambre, con edades comprendidas en el período fetal – infantil (García Mancuso 2013).

Aunque el estudio incluyó muchos otros análisis, profundizaremos en comentar aquellos donde se utilizaron diversas operaciones matemáticas para poder aproximar a la edad de muerte de los individuos. De manera específica se consideraron los huesos largos del

esqueleto apendicular donde se estimó la edad a partir de sus longitudes diafisarias mediante la implementación de diferentes ecuaciones de regresión generadas especialmente en esta investigación. Estas ecuaciones predictivas se utilizaron como herramienta para la estimación de la edad a partir de húmero, radio, ulna, fémur, tibia y fíbula. (García Mancuso 2013).

Para comprender el funcionamiento del análisis de regresión que permitió predecir la edad a partir de la longitud de los distintos huesos es necesario tener conocimiento sobre las características de dichas funciones. Estas funciones generadas relacionan una información conocida (variable independiente) y una información que se quiere conocer (variable dependiente), en este caso la longitud de determinado hueso largo y la edad de muerte respectivamente. Una exploración gráfica de los datos permitió evaluar la relación entre las variables y se ajustaron a ecuaciones lineales, cuadráticas y exponenciales para ver cuál se ajustaba mejor. Después de un procedimiento estadístico se seleccionaron las funciones que mejor ajustaban la relación entre las variables y se obtuvieron los parámetros que permitieron predecir la edad a partir de la longitud de los diferentes huesos largos. Así, por ejemplo, el modelo cuadrático es el más adecuado para estimar la edad a partir de la longitud de la fíbula; el modelo exponencial para estimar la edad a partir del húmero, radio, ulna, fémur y tibia siempre que se trate del periodo desde las 20 hasta las 170 semanas. Llamando a $x = longitud\ del\ hueso\ largo$ e $y = edad\ de\ muerte\ del\ individuo$, las funciones generadas en estos casos tienen la siguiente forma:

- Cuadrática

$$Edad = a * longitud^2 + b * longitud + c$$
$$y = ax^2 + bx + c$$

- Exponencial

$$Edad = c * e^{b*longitud}$$
$$y = c * e^{-bx}$$

Los coeficientes de regresión *a, b y c* fueron estimados a partir de distintas fuentes de referencia y se muestran en la siguiente tabla:

Variable independiente (longitud)	Ecuación	Constante (c)	b	a
Húmero	Exponencial	11,782	0,19	
Radio	Exponencial	8,314	0,029	
Ulna	Exponencial	9,324	0,025	
Fémur	Exponencial	15,570	0,013	
Tibia	Exponencial	13,369	0,017	
Fíbula	Cuadrática	9,417	0,167	0,006

Modelos de regresión para estimación de edad (modificado de García Mancuso 2013)

Estudios de crecimiento y desarrollo

Poder construir normas o valores de referencia sobre el crecimiento de las poblaciones es uno de los campos de investigación principal de la antropología. Su potencial excede el ámbito académico y aporta información de alta significación en salud para evaluar el estado nutricional, condicionamientos ambientales, entre otros.

En el trabajo ¨*Aplicación de modelos matemáticos a las curvas de crecimiento de escolares vizcaínos: un estudio comparativo*¨ de E. Rebato y J. Rosique analizan el grado de ajuste para peso y estatura de cinco funciones matemáticas.

La evolución de distintas variables antropométricas y fisiológicas a diferentes edades se plasma en una curva media de crecimiento de una población. Si el muestreo es representativo de la población en estudio, se puede también construir normas o valores de referencia para la misma (Rebato y Rosique 1994).

En este caso los autores eligen un método de muestreo transversal, donde cada individuo es examinado una sola vez. Por lo tanto la distribución de las edades se obtiene a partir de individuos distintos. Las curvas de distancia de la variable talla y peso, entre otras, en función de la edad se pueden ajustar a distintos modelos matemáticos. La estimación de los parámetros del modelo y su interpretación biológica será de utilidad para caracterizar a la población y para predecir algunos parámetros valiosos, como la estatura adulta que alcanzará la población en crecimiento o la edad promedio del estirón puberal (Rebato y Rosique 1994).

Como antecedentes de esta investigación los autores plantean que los primeros modelos para ajustar las curvas de crecimiento se aplicaron para estudiar la talla en función de la edad. Estas curvas no describían el crecimiento de manera global, sino que lo hacían para cada periodo de crecimiento (Count 1942; Jayasekara *et al*. 1988). Por lo tanto, para describir el crecimiento de forma global, se intentó en primer lugar, combinar diversas funciones y, posteriormente, se obtuvieron funciones logísticas para el proceso completo de crecimiento. Así Preece y Baines (1978) describen una nueva familia de funciones para ajustar dicho crecimiento. Las mismas derivan de la ecuación diferencial $\frac{dh}{dt} = S(t) * (h1 - h(t))$[10] donde:

- ***h1*** es la talla adulta
- ***h*** es el tamaño alcanzado a la edad t
- $\boldsymbol{S(t)}$ es la velocidad de crecimiento en función del tiempo. La curva $S(t)$ se aproxima a una curva logística a la cual se le estiman cinco parámetros.

$$S(t) = h1 - \frac{2(h1 - Yc)}{e^{So(t-c)} + e^{S1(t-c)}}$$

[10] En el año 2013, Sayers y colaboradores publican un artículo en la revista Annals of Human Biology donde presentan correcciones del manuscrito original de 1978 para mejorar el cálculo directo de la detención del crecimiento y el pico de velocidad de crecimiento en estatura (Sayers *et al*. 2013). Recomendamos su lectura para profundizar sobre el tema.

- ***S_0*** es la asíntota inferior y se relaciona con la velocidad de crecimiento prepuberal;
- ***S_1*** es la asíntota superior y se relaciona con el pico de velocidad máxima del crecimiento puberal;
- ***c*** es la edad al punto de inflexión, es decir, aproximadamente la edad al momento en que la velocidad es máxima;
- ***Yc*** es la estatura a la edad c;
- ***h1*** es la talla adulta

Función logística de Preece y Baines (1978) adaptado de Rebato y Rosique (1994:230)

Para poder elaborar las curvas de crecimiento y evaluar el mejor modelo que se ajuste a la población vasca en periodo de crecimiento analizaron una muestra de 1690 individuos y sometieron la información al análisis estadístico. Los modelos matemáticos que probaron fueron:

a) Modelo I de Preece – Baines (1978)

$$Y = h1 - \frac{2(h1 - Yc)}{e^{So(t-c)} + e^{S1(t-c)}}$$

b) Regresión logística (Marshall y Tanner 1986)

$$Y = K + \frac{c}{1 + e^{a-bX}}$$

c) Función de Gompertz (Marubini et al. 1971)

$$Y = P + Ke^{-e^{a-bt}}$$

d) Regresión de Reed (Berkey y Reed 1987)

$$Y = a + bX + c\ln(X) + d/X$$

e) Regresión cuadrática (Jayasekera, 1988)

$$Y = a + bX + cX^2$$

Aplicando diversas técnicas estadísticas los autores evaluaron que modelo de Preece y Baines (1978) es el que mejor se ajusta para la estatura tanto en varones como en mujeres, quedando determinadas las siguientes funciones:

- Para varones

$$Y = 174{,}521 - \frac{2(174{,}521 - 161{,}39)}{e^{0{,}088(t-13{,}959)} + e^{0{,}905(t-13{,}959)}}$$

- Para mujeres

$$Y = 160{,}909 - \frac{2(160{,}909 - 151{,}92)}{e^{0{,}133(t-12{,}238)} + e^{1{,}365(t-12{,}238)}}$$

En cambio la función logística de Marshall y Tanner (1986) explica mejor el peso en función de la edad, tanto para varones como para mujeres.

- Para varones

$$Y = 26{,}4 + \frac{48{,}528}{1 + e^{5{,}967-0{,}447X}}$$

- Para mujeres

$$Y = 32{,}91 + \frac{23{,}307}{1 + e^{13{,}642-1{,}149X}}$$

A su vez, los autores utilizaron estas funciones para comparar esta población con otras y para describir el dimorfismo sexual. Este tipo de estudios son muy importantes dado que estos resultados permiten la detección de problemas de crecimiento y de salud en general ajustados a poblaciones específicas (Rebato y Rosique 1994).

Velocidad de crecimiento del seno frontal

Un caso muy ilustrativo es el trabajo de Prossinger (2001) "Sexually dimorphic ontogenetic trajectories of frontal sinus cross sections". En este trabajo se cuenta con una gran cantidad de información a partir de datos publicados sobre la sección transversal del seno frontal en individuos de 3 a 11 años (105 hombres y 87 mujeres) procedentes de Europa central para investigar sobre su ontogenia. Hoy en día hay dos visiones principales sobre el origen funcional de este rasgo: los modelos espaciales de la formación del torus supraorbital y los modelos de stress masticatorio. Estos dos modelos no son necesariamente incompatibles. Tal vez la falta de explicaciones para la fisiología o el rol de los senos frontales son debido a que es un remanente evolutivo (Prossinger 2001). Para conocer un poco más sobre la importancia de este rasgo para los estudios de evolución humana recomendamos la lectura de Gould *et al*. (2015) y Pandiani *et al*. (2015)

Aun así, sigue siendo un rasgo muy interesante de analizar dado que estos pueden contribuir a la comprensión de la evolución morfológica del cráneo humano. En este trabajo se propone otro enfoque a los diversos estudios de este rasgo. De manera específica se focaliza en la curva de desarrollo (trayectoria ontogenética) del área y asimetría de los senos frontales.

Sin entrar en detalles sobre las naturalezas de las muestras y las técnicas utilizadas, cabe aclarar que los datos relevados incluyen rayos x y morfometría geométrica. Primero grafica el área total de la sección transversal para hombres y mujeres por año, con su promedio. Después las áreas del lóbulo izquierdo versus derecho, por sexo, a fin de detectar asimetrías. Para ello utiliza un algoritmo de interpolación lineal que asume que la ordenada es la variable dependiente y la abscisa la variable independiente. La variable independiente se define como

la variable con menor varianza (en sentido estadístico). Así el área izquierda es función de la derecha. Sin embargo, asume que ni la sección izquierda ni derecha son variables dependientes dado que los desvíos estándar son comparables. La interpolación lineal en este caso se encuentra minimizando la función de mérito.

Para el modelado matemático de la ontogenia de la sección transversal del seno frontal el autor plantea la necesidad de conocer cómo el área total crece con la edad, o, dicho de otra manera, cómo es su trayectoria ontogenética. Como primer paso observa los promedios por edad de hombres y mujeres por separado. Debido a que los senos frontales dejan de expandirse después de una cierta edad, sugiere interpolar los promedios y aproximar la curva de desarrollo a una función logística de la forma,

$$A(t) = \frac{1}{\propto e^{-rt}}$$

Después del análisis de regresión logística se obtuvieron dos funciones, una para hombres y otra para mujeres, de la forma:

- Para hombres

$$A(t) = \frac{1}{52{,}8609\ e^{0{,}36214t}}$$

- Para mujeres

$$A(t) = \frac{1}{121{,}404\ e^{0{,}5124t}}$$

Para dilucidar, analítica y biológicamente, el sentido del parámetro $t0$ se hallaron la primera y segunda derivada de la función logística.

La primera derivada es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{re^{rtt0}}{e^{rtt0^2}}$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2A}{dt2} = \frac{2r^2e^{2rtt0}}{1e^{rtt0^3}}\frac{r^2e^{rtt0}}{1e^{rtt0^2}}$$

El autor hace explicito su interés cuando la segunda derivada es 0 dado que la solución de $A''(T) = 0$ indica el momento donde T es un punto de inflexión en la curva de desarrollo. En ese punto la tasa de crecimiento es máxima (primera derivada). Como resultado encuentra que la tasa máxima de desarrollo es mucho mayor y se da más tempranamente en mujeres que en varones. Este modelo permite predecir el final del crecimiento del seno frontal. A partir de esta investigación el autor afirma que las mujeres desarrollan su seno frontal mucho más rápido que los hombres y, a su vez, completan su desarrollo mucho antes (Prossinger 2001).

Áreas y volúmenes de piezas arqueológicas

A modo de ejemplo referimos al artículo ¨*Modelado en tres dimensiones de recipientes arqueológicos a partir de sus perfiles*¨ de Jorge Blancas, Luis Barba, Agustín Ortiz y Felipe Barba donde se proponen una metodología para el registro y modelado de vasijas arqueológicas a partir de sistemas informáticos y su comparación con técnicas más sofisticadas. Los autores explican de manera detallada toda la metodología de trabajo para registrar las piezas arqueológicas. Una vez fotografiada y digitalizada la pieza, se reconstruye el perfil y se aplican diversos algoritmos con un procesador de imágenes y se obtiene un modelo en tres dimensiones de la pieza. Con la utilización de estos sistemas el cálculo de volumen es automático, aun así, los autores tienen la consideración de hacer explícito el procedimiento matemático de base de la metodología. Siguiendo a estos autores, el volumen del sólido de revolución se calcula al girar alrededor del eje y la región que está comprendida entre la curva $x = F(y)$ con $F(y) > 0$, el eje y y las rectas horizontales $y = a$ y $y = b$, donde $0 < a < b$, está dado por la integral:

$$V = 2\pi \int_a^b y\, f(y) dy$$

El área de la superficie generada al hacer girar una curva $X = F(y)$ alrededor del eje y es:

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\; dy$$ (Blancas et al. 2011)

Sistemas de Geoposicionamiento

Tomemos como ejemplo el trabajo de Richard Thompson Global Positioning System: The Mathematics of GPS Receivers publicado en la revista Mathematics Magazine. Volumen 71. N°4 de 1998. Todos los días usamos de alguna u otra manera un dispositivo que utiliza un sistema de posicionamiento global. Acaso alguna vez nos preguntamos de qué manera dicho dispositivo utiliza la información de los satélites para determinar nuestra ubicación en el espacio.

La mayoría de los dispositivos que utilizamos actualmente para recibir información satelital que nos permiten ubicar un punto en el espacio operan con dos sistemas, el sistema de posicionamiento global (GPS) y el GLONASS. El primero fue desarrollado por el departamento de defensa de los Estados Unidos y actualmente opera con 24 satélites y el segundo fue desarrollado por la Unión Soviética y cuenta con 31 satélites. Cualquiera de los dos sistemas funciona bajo los mismos principios matemáticos.

Veamos cómo funciona siguiendo la explicación de Thompson (1998). Tomemos al centro de la Tierra como el origen de nuestro sistema de coordenadas. Como estamos trabajando en

tres dimensiones vamos a necesitar información de cuatro satélites. Los vamos a llamar S_1, S_2, $S_3 y\, S_4$ y suponemos que cada satélite S_i está ubicado en (X_i, Y_i, Z_i) cuando transmite una señal en el tiempo T_i. Si las señales son recibidas en el tiempo T'_i de acuerdo al reloj del dispositivo receptor de la señal, entonces $\Delta Ti = T'i - Ti$ y consideramos a ε para representar cualquier error en nuestra medición del tiempo. Entonces el receptor computa la distancia $d(\Delta t_i, \varepsilon)$ que indica cuán lejos estamos de cada satélite. Nuestra posición (X_0, Y_0, Z_0) está localizada en cada una de las esferas. En la mayoría de las situaciones va a haber un sólo valor de ε que permita a las esferas tener un punto en común. Por lo tanto, nuestra localización se determina resolviendo un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} (X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2 + (Z_0 - Z_1)^2 = d(\Delta t_1, \varepsilon)^2 \\ (X_0 - X_2)^2 + (Y_0 - Y_2)^2 + (Z_0 - Z_2)^2 = d(\Delta t_2, \varepsilon)^2 \\ (X_0 - X_3)^2 + (Y_0 - Y_3)^2 + (Z_0 - Z_3)^2 = d(\Delta t_3, \varepsilon)^2 \\ (X_0 - X_4)^2 + (Y_0 - Y_4)^2 + (Z_0 - Z_4)^2 = d(\Delta t_4, \varepsilon)^2 \end{cases}$$

Cuando encontramos la solución numérica, las coordenadas planas (X_0, Y_0, Z_0) son convertidas a coordenadas esféricas de latitud, longitud y altitud. Para resumir, del receptor se espera que reciba información sobre el tiempo y posición de los satélites; que mantenga una precisión estable; que seleccione satélites con un buen rango de posición; que encuentre una aproximada solución numérica para un sistema de ecuaciones y que haga una transformación de coordenadas (Thompson 1998).

Bibliografía

Berkey C. S. y R. B. Reed. 1987. A model for describing normal and abnormal growth in early childhood. *Human Biology* 59:973-987

Blancas J., Barba L., Ortiz A. y F. Barba. 2011. Modelado en tres dimensiones de recipientes arqueológicos a partir de sus perfiles. *Ciencias* 104, Octubre-Diciembre, 56-63. [En línea]

Count E. W. 1942. A quantitative analysis of growth in certain human skull dimensions. *Human Biology* 14:143

Desántolo B. 2013. *Validación metodológica para la estimación de edad en restos óseos humanos adultos: análisis histomorfométrico.* Tesis doctoral inédita. Facultad de Ciencias Naturales y Museo. Universidad Nacional de La Plata. http://hdl.handle.net/10915/27879

García Mancuso R. 2013. *Análisis bioantropológico de restos esqueletales de individuos subadultos Diagnóstico de edad y sexo, validación técnico metodológica.* Tesis doctoral inédita. Facultad de Ciencias Naturales y Museo. Universidad Nacional de La Plata. http://hdl.handle.net/10915/28947

Gould M., Joosten G., Pandiani C., Pennini V., Anzelmo M., Ventrice F. y M. Sardi. 2015. Asociación entre el seno frontal y el torus supraorbitario en individuos adultos. *XII Jornadas Nacionales de Antropología Biológica.*

Jayasekara R., Lasswell-Hoff J., Garner C., Kristl G. y C. Hoff. 1988. Adolescent Growth in Stature among Sinhalese Males: Preliminary Results of a Cross-Sectional Study. *Human Biology*. Vol. 60, No. 6, pp. 825-831

Marshall W. A. y J. M. Tanner J. M. 1986. Puberty. *Human Growth* Vol. 2. F. Falkner, J.M. Tanner (eds). Plenum Press, New York: 171-209.

Marubini E., Resele L. y G. Barghini. 1971. A comparative fitting of the Gompertz and logistic functions to longitudinal height data during adolescence in girls. *Human Biology* 43. 2:237-252.

Pandiani C., Joosten G., Gould M., Pennini V., Anzelmo M., Ventrice F. y M. Sardi. 2015. Ontogenia del seno frontal en una muestra de tomografías computadas. *XII Jornadas Nacionales de Antropología Biológica.*

Preece M. A. y M. K. Baines. 1978. A new family of mathematical models describing the human growth curve. *Annals of Human Biology* 5:1-24.

Prossinger H. 2001. Sexually dimorphic ontogenetic trajectories of frontal sinus cross sections. *Collegium Antropologium* 25, 1:1-11.

Rebato E. y J. Rosique. 1994. Aplicación de modelos matemáticos a las curvas de crecimiento de escolares vizcaínos: un estudio comparativo. *Cuadernos de Sección*. Antropología – Etnografía 11, 225-240.

Sayers A., Baines K. y K. Tilling. 2013. A new family of mathematical models describing the human growth curve. Erratum: Direct calculation of peak height velocity, age at take-off and associated quantities. *Annals of Human Biology*, 40:3, 298-299. DOI: 10.3109/03014460.2013.772655

Thompson R. 1998. Global positioning system: the mathematics of GPS receivers. *Mathematics Magazine* 71, 4:260-269.

Lecturas sugeridas

Barceló J. A. e I. Bogdanovic. 2015. *Mathematics and Archaeology.* CRC Press. Florida.

Clarke D. L. 1983. *Arqueología analítica.* Ediciones Bellaterra, Barcelona.

Doran J. E. y F. R. Hodson. 1975. *Mathematics and computers in archaeology*. Edinburgh University Press. Edinburgh.

Drennan R. D. 1996. *Statistics for Archaeologists. A common sense approach.* Kluwer Academic / Plenum Publishers, Nueva York.

Fletcher M. y G. R. Lock. 1991. *Digging numbers. Elementary statistics for archaeologists*. Oxbow, Oxford.

Grayson D. K. 1984. *Quantitative Zooarchaeology: topics in the analysis of archaeological faunas.* Academics Press, Orlando, Florida.

Haining R. 2003. *Spatial Data Analysis. Theory and Practice.* Cambridge University Press, Cambridge.

Hodson F. R., Kendall D. G. y P. Tautu (eds.). 1971. *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences.* Edinburgh University Press, Edinburgh.

Mueller J. W. (ed.). 1975. *Sampling in Archaeology.* University of Arizona Press, Tucson.

Orton C. 1988. *Matemáticas para arqueólogos.* Alianza, Madrid.

Shennan S. 1992. *Arqueología cuantitativa.* Crítica, Barcelona.

CAPÍTULO 10
La Matemática en las Investigaciones biológicas

Verónica Amor

Introducción

Como estudiantes, a menudo nos preguntamos para que nos sirve matemática. Nos suele resultar una materia difícil, e incluso a veces, inentendible. Sin embargo, sería de gran utilidad tener otra mirada sobre esta ciencia, que es, sin duda, una herramienta fundamental para el desarrollo de investigaciones de otras disciplinas científicas, en las cuales se incluyen la Biología y la Antropología.

A través de la modelización matemática, es posible, por ejemplo, estudiar el crecimiento de las poblaciones animales o celulares, la concentración de un producto en una reacción química, o la dinámica de propagación y control de una enfermedad, tales como el HIV-SIDA o la enfermedad de Chagas, citando algunos ejemplos.

Nos puede parecer extraño que profesionales de las ciencias naturales se dediquen a representar situaciones de la realidad en una forma matemática artificial, pero hay razones que lo justifican. Los modelos pueden agrupar en forma de unos pocos parámetros, las propiedades comunes importantes de un gran número de ejemplos distintos. Estos nos permiten describir propiedades desconocidas del sistema que se está modelando, entender en profundidad el fenómeno que se estudia y realizar alguna predicción sobre su comportamiento futuro.

En las páginas siguientes, mostramos ejemplos de modelos y situaciones en los cuales, la matemática ha sido una herramienta de gran utilidad.

Estudio de la diabetes

La diabetes es una enfermedad grave y muy extendida en todo el mundo, siendo cada vez más frecuente en la población. Un gran número de investigadores tratan de encontrar métodos para el diagnóstico y su tratamiento. Uno de los enfoques, es el diseño de modelos matemáticos que describan la cinética en sangre de las concentraciones de glucosa e insulina.

Aunque existe una gran variedad de modelos, podemos citar como ejemplo al modelo de Ackerman y su equipo, quienes en la década de 1960, introdujeron un modelo pionero para el estudio de los procesos fisiológicos que tienen lugar en el cuerpo durante la metabolización de la glucosa.

El objetivo de Ackerman y su equipo era construir un modelo que describiera con precisión el sistema regulador de la glucosa en la sangre durante una prueba de tolerancia a la misma, y en el cual, mediante un número reducido de parámetros, se obtuviera la información para distinguir entre individuos sanos, casos leves de diabetes o propensos a padecer la enfermedad.

Mediante el desarrollo de dicho modelo, obtuvieron la siguiente expresión que permitía determinar el nivel de glucosa en sangre:

$$G(t) = G_b + Ae^{-\alpha t} sen(\omega t)$$

donde:

G_b representa el nivel de equilibrio de azúcar en la sangre,

ω da una respuesta de frecuencia a las perturbaciones, y

α mide la capacidad del sistema para volver al estado de equilibrio después de haber sido perturbado.

Otro método sencillo y con pocos parámetros, fue desarrollado en los años ochenta por Richard N. Bergman y su equipo, y se conoce como modelo mínimo.

El modelo, como se propuso originalmente por los autores, pretende ser considerado como un sistema compuesto por dos partes. La primera parte, utilizando las ecuaciones (1) y (2), describe la evolución en el tiempo de la concentración plasmática de glucosa; para esta primera parte, la concentración de insulina en plasma es considerada como una función conocida. La segunda parte consta de la ecuación (3), y describe la concentración de insulina en el plasma en función del tiempo, representando la dinámica de la liberación de insulina pancreática en respuesta al estímulo de un aporte de glucosa; para esta segunda parte, la concentración de glucosa en plasma se considera, análogamente como una función conocida.

Matemáticamente es un modelo compuesto por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

El modelo mínimo viene dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -p_1(G(t) - G_b) - X(t)G(t) \qquad G(0) = p_0 \qquad (1)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = -p_2X(t) + p_3[I(t) - I_b] \qquad X(0) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = p_4[G(t) - p_5] + t - p_6[I(t) - I_b] \qquad I(0) = p_7 + I_b \qquad (3)$$

donde:

- t es el tiempo
- $G(t)$ es la concentración de sangre en el instante t
- $I(t)$ es la concentración de insulina en sangre
- $X(t)$ es el efecto de la insulina activa

- G_b es la glucemia basal del sujeto
- I_b es la insulina basal del sujeto
- p_0 es la glucemia teórica en el momento 0 después del bolo de glucosa
- p_1 es la tasa de eliminación de glucosa independiente de la insulina
- p_2 es la tasa de eliminación de la insulina activa (disminución de la absorción)
- p_3 es el incremento en la capacidad de absorción debido a la insulina
- p_4 es la tasa de liberación pancreática después del bolo
- p_5 es la glucemia objetiva del páncreas
- p_6 es la tasa de decaimiento para la insulina en el plasma
- p_7 es la concentración teórica de insulina en el plasma en el tiempo 0

Estudio del crecimiento tumoral

En las últimas dos décadas, se han desarrollado numerosos modelos matemáticos para la simulación del fenómeno de crecimiento en tumores. Por lo general, este modelado se centra en tumores sólidos donde el crecimiento proviene principalmente de la proliferación celular. Muchos de estos modelos tienen uso potencial en la predicción y verificación de diferentes estrategias en terapias contra el cáncer. Los tumores son poblaciones celulares que crecen en un ambiente confinado donde la accesibilidad a nutrientes es limitada.

Los modelos empíricos se basan fundamentalmente en las observaciones experimentales del fenómeno en investigación, teniendo en cuenta distintos procesos y factores externos que afectan las características del fenómeno. Las ecuaciones que rigen estos modelos son derivadas de las observaciones y pueden no ser basadas en una deducción a partir de primeros principios que las justifiquen. Uno de los modelos empíricos más utilizado en la biología en los casos de crecimiento de individuos, células, poblaciones, es el desarrollado por Gompertz. Dicho modelo fue propuesto originalmente para la evaluación del crecimiento demográfico y propone que el crecimiento sigue la ecuación diferencial ordinaria:

$\frac{dV}{dt} = \beta V \ln\left(\frac{K}{V}\right)$ con condición inicial V (en t = 0) = V_0 ; cuya solución exacta es:

$$V(t) = Ke^{\ln\left(\frac{V_0}{K}\right)e^{-\beta t}}$$

donde:

- $V(t)$ denota al tamaño del tumor
- $V(0)$ representa el tamaño del tumor en el instante t=0
- β es una constante relacionada a la habilidad de proliferación de las células
- K es la capacidad de carga, es decir, el tamaño máximo que se puede alcanzar con los nutrientes disponibles

El tamaño del tumor $V(t)$, cuando el tiempo se hace muy grande es igual a K, independientemente de que $V(0) > 0$. Notemos que, en ausencia de terapias, $V(0) < K$, mientras que en presencia de terapias $V(0) > K$.

Estimación del trabajo que realiza el músculo cardíaco durante un ciclo

El trabajo sistólico del corazón es la cantidad de energía que el corazón convierte en trabajo, durante cada latido cardíaco, mientras bombea sangre hacia las arterias (Guyton, 2011)

El cálculo del trabajo cardíaco, se puede realizar a partir del gráfico que representa la presión sanguínea en el ventrículo izquierdo en función de su volumen.

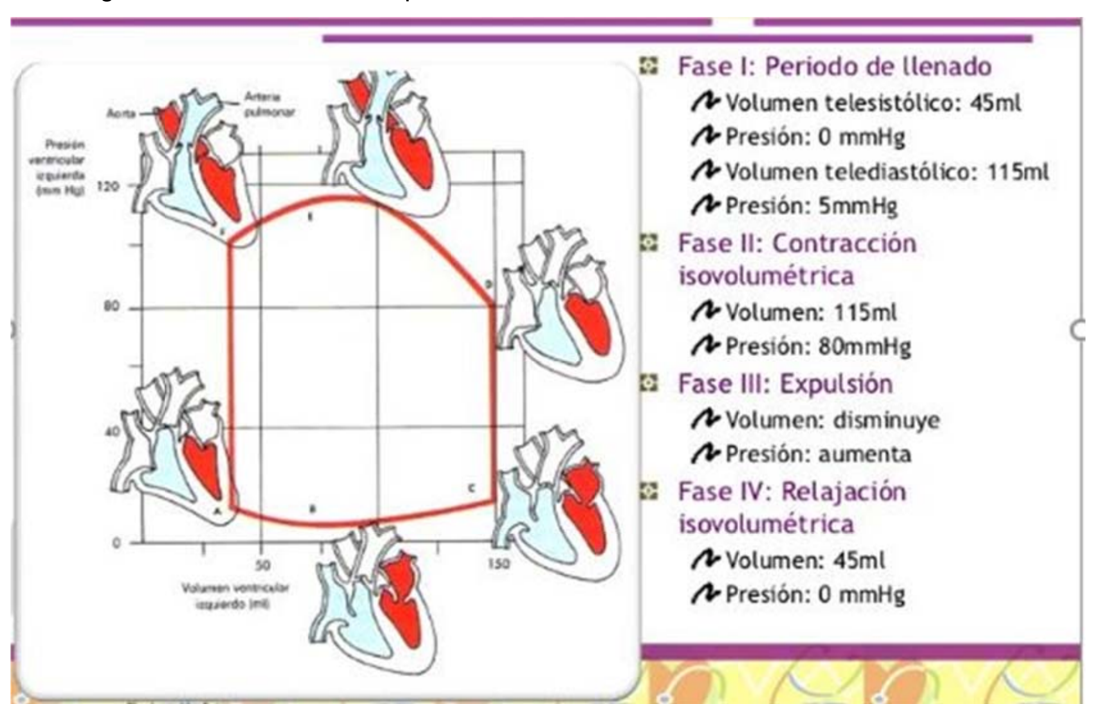
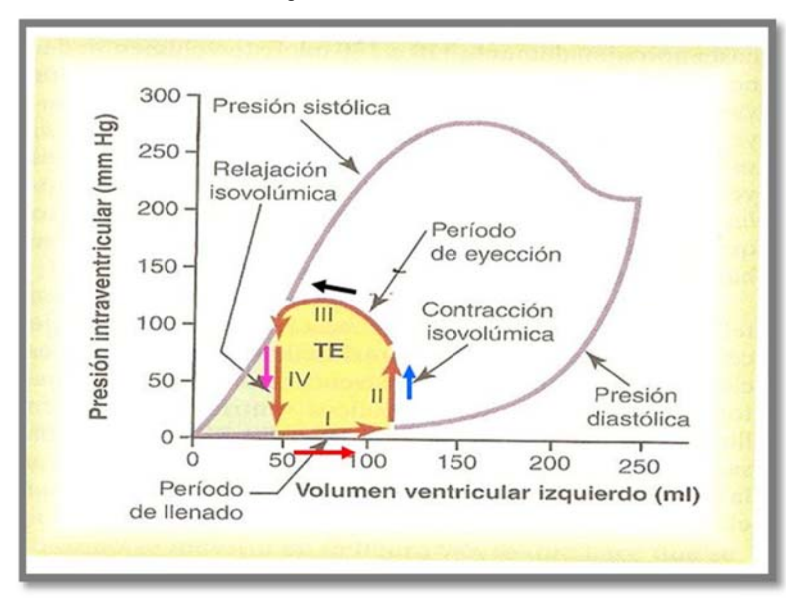


Diagrama Volumen Presión[11]



Tratado de Fisiología médica.[12]

[11] http://es.slideshare.net/sedivreyo/exploracin-fsica-cardiolgica-presentation
12 http://ricuti.com.ar/no_me_salen/TERMO/ter34.html

Recordemos que se define trabajo como el producto de la presión ejercida (p) por cada variación de volumen (ΔV):

$$W = p\ \Delta V$$

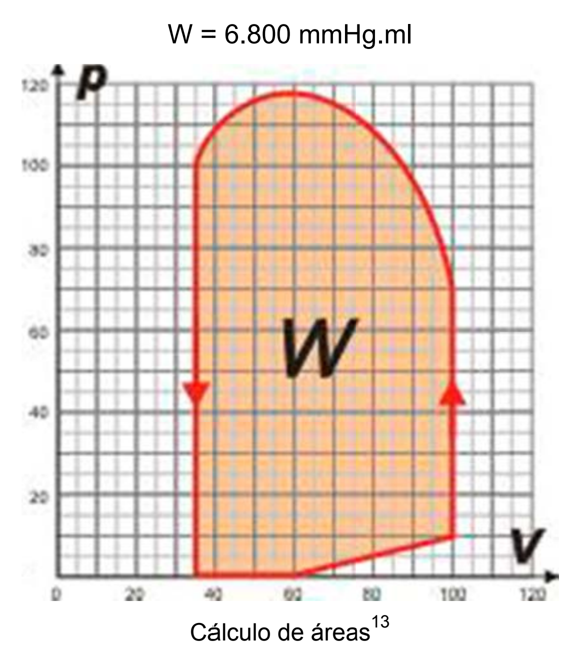
Dado que la presión no es constante, resulta necesario sumar cada pequeño cambio de volumen multiplicado por la presión que lo causó. Para realizar este cálculo, podemos utilizar la función integral:

$$W = \int p\ dV$$

Que se lee así: el trabajo es la suma integral (∫) de todos los productos entre el valor de la presión (p) y el pequeño cambio de volumen (dV) que esa presión produjo.

Este ejemplo relaciona la integración con el cálculo de áreas. En el gráfico, cada cuadrado representa un área de 10 unidades de presión por 10 unidades de volumen, de modo que equivale a 100 mmHg/ml. El número aproximado es 68 cuadrados. De modo que el área total representa un trabajo de:

W = 6.800 mmHg.ml



Cálculo de áreas[13]

Estudio de la propagación de la infección por *Trypanosoma cruzi*

La enfermedad de Chagas es una zoonosis producida por el protozoo flagelado *Trypanosoma cruzi*. Este parásito es transmitido por insectos hematófagos de la subfamilia Triatominae. La tripanosomiasis constituye una infección crónica de difícil diagnóstico, manejo y tratamiento. Se calcula que en el mundo hay entre 6 y 7 millones de personas infectadas (WHO, 2016). Es uno de los problemas sanitarios más importantes de América Latina que genera una importante carga de morbilidad y mortalidad e influye en la carga social y económica.

[13] http://ricuti.com.ar/no_me_salen/TERMO/ter34.html

La infección se produce cuando un insecto infectado se alimenta sobre un mamífero sano y luego deposita sus heces u orina cargadas de *T. cruzi* sobre la piel o las mucosas del mismo; los parásitos ingresan al organismo a través de las escoriaciones, por la misma picadura o por la mucosa. Otras posibles formas de transmisión son la vía congénita y la relacionada con la transfusión de sangre contaminada con el parásito.

Los perros, constituyen el principal reservorio doméstico de transmisión del *T. cruzi*, en las 21 áreas endémicas de América Latina en las que el hombre cohabita con los triatominos. A causa del gran número de animales silvestres que sirven como reservorio de éste parásito, esta zoonosis no puede erradicarse.

Durante las últimas décadas, la enfermedad se ha expandido de manera considerable desde las áreas rurales, hacia centros urbanos, debido a la inmigración de individuos a las ciudades. Este proceso, incrementa el riesgo de su transmisión. El "Chagas urbano" es principalmente transmitido de manera horizontal, por medio de transfusiones de sangre contaminada con el parásito y de manera vertical, de madre a hijo.

El modelo particiona a la población humana en cuatro compartimentos: humanos susceptibles (H_S), humanos enfermos en la etapa aguda (H_A), humanos en la etapa crónica indeterminada (H_I) y humanos en la etapa crónica con patología determinada (H_P). Se consideran además las poblaciones de triatominos, particionados en triatominos susceptibles (V_S) y triatominos infectados (V_I), y la población canina, dividida en perros susceptibles (D_S) y perros infectados (D_I) (Fabrizio, 2011).

Se asume que el tamaño de las tres poblaciones involucradas (humana, vectorial y canina) depende del tiempo. Para expresar los cambios temporales, en las tres poblaciones estudiadas, se emplea un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que representan las tasas de cambio de la cantidad de individuos en cada compartimento, con respecto al tiempo.

a) Humana

Considerando a H(t) la población total humana en el tiempo t, se tiene:

$$\frac{d\,H(t)}{dt} = m_H + (b_{HS} - d_{HS})\,H_S(t) + (-d_H)\,H_A + (b_{HI} - d_{HI})\,H_I(t) + (b_{HI} - d_{HP})\,H_p(t) \qquad (1)$$

siendo m_H la tasa de migración neta en humanos. De este modo la tasa de cambio en el total de humanos es una función lineal multivariable de los flujos netos en cada uno de los compartimientos.

b) Triatominos

Si consideramos a la población total de triatominos, se obtiene

$$\frac{dV(t)}{dt} = m_v + (b_v - d_v)\,V(t) \qquad (2)$$

Se presentan distintas situaciones.

1) Si $(b_v - d_v) = 0$ de la ecuación (2) se obtiene: $V(t) = m_V t + V_0$

Por lo tanto, si la tasa de natalidad de los triatominos es igual que la de mortalidad, la cantidad de triatominos resulta ser **una función lineal** del tiempo, dependiendo su crecimiento o decrecimiento del signo de la tasa de migración, si esta última es distinta de cero. Si, además, la tasa neta de migración es igual a cero, la cantidad de triatominos resulta ser constante en el tiempo.

2) Si $(b_v - d_v) \neq 0$, resolviendo la ecuación diferencial (2), se concluye que:

(i) si, $(b_v - d_v) > 0$ la población de triatominos **crece exponencialmente**;

(ii) si $(b_v - d_v) < 0$ la población de triatominos **decrece exponencialmente.**

c) Canina

En el caso de la población canina

$$\frac{dD(t)}{dt} = m_D + (b_{DS} - d_{DS})\,(D_s(t) + b_{DI} - d_{DI})\,D_I(t)$$

En general, se espera que la tasa promedio de nacimientos de perros infectados sea menor o igual que la de los susceptibles, y que la tasa promedio de mortalidad de los infectados sea mayor que la de los susceptibles.

En epidemiología, el número básico de reproducción R_0 representa el número de infecciones secundarias producidas al introducir un individuo infectado en una población susceptible. Además, si $R_0 < 1$ la enfermedad desaparece del medio (dado que cada individuo infectado produce, en promedio, menos que un individuo infectado) y si $R_0 > 1$ persistirá en la población convirtiéndose en epidemia (cada individuo infectado en su completo período de infectividad, al tener contacto con individuos susceptibles, producirá, en promedio, más que un individuo infectado) (Leah, 2005; Fabrizio, 2011).

Matemáticamente el R_0 puede ser obtenido a partir del radio espectral de la matriz de la siguiente generación, esto es: $R_0 = \rho\, FY^{-1}$ (Leah, 2005)

La matriz de la próxima generación (MPG) se obtiene como el producto de F (matriz de los nuevos infectados que van surgiendo) y la inversa de Y (transferencias dentro y fuera de un compartimento) o simbólicamente, FY^{-1}.

El siguiente ejemplo, ilustra el cálculo de dicha matriz.

$$FY^{-1} = \begin{pmatrix} A1 & A2 & A3 & A4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A5 & A6 & A7 & 0 & A8 \\ 0 & 0 & 0 & A9 & A10 \end{pmatrix}$$

En esta matriz, A1 denota el número esperado de nuevas infecciones agudas producidas por un humano infectado que ingresa al sistema en estado agudo durante todo su período de infectividad por las vías directas (transfusional y congénita); A2, expresa el aporte a los nuevos agudos de individuos que originalmente atraviesan la etapa crónica indeterminada; A3 provee el aporte de los individuos que están atravesando la última etapa de la enfermedad; A4 provee el número de

nuevos humanos infectados provistos por triatominos infectados; A5 expresa el número de nuevos triatominos infectados producidos por el ingreso de un humano infectado en la etapa aguda durante su completo período de infectividad; A6 y A7 denotan los nuevos triatominos infectados producidos por el ingreso de un humano en la etapa crónica indeterminada y crónica con patología, respectivamente; A8 indica la cantidad de nuevos triatominos parasitados con *T. cruzi* por alimentarse de un perro infectado introducido en una población compuesta sólo por individuos susceptibles, durante su completo período de infectividad supuesto; A9 y A10 proveen la cantidad de nuevos perros infectados vía vectorial y congénita, respectivamente (Fabrizio, 2011)

La matriz FY^{-1} de la próxima generación es un vector (en el sentido matemático) cuyos elementos denotan las cantidades de hospederos y triatominos infectados primarios que originalmente ingresan al sistema en esos estados (HA, HI, HP, VI y DI), entonces:

$$\begin{pmatrix} A1 & A2 & A3 & A4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A5 & A6 & A7 & 0 & A8 \\ 0 & 0 & 0 & A9 & A10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HA \\ HI \\ HP \\ VI \\ DI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A1\,HA + A2\,HI + A3\,HP + A4\,VI \\ 0 \\ 0 \\ A5\,HA + A6\,HI + A7\,HP + A8\,DI \\ A10\,DI + A9\,VI \end{pmatrix}$$

El producto entre ambas da como resultado el vector cuyos elementos son las cantidades de hospederos y triatominos infectados producidos por los individuos infectados durante su completo período de infectividad.

A partir de este vector, se desprenden los siguientes resultados:

- Debido a la dinámica de la enfermedad, en los humanos sólo se producen infectados en etapa aguda, generados por humanos o triatominos infectados con *T. cruzi*.
- Los triatominos se infectan por el contacto con humanos o caninos infectados con *T. cruzi.*
- Los perros se infectan por contacto con triatominos infectados con el *T. cruzi* y por vía congénita.

Balanceo de ecuaciones químicas por el método matricial

En una reacción química, un conjunto de reactivos en las proporciones adecuadas, se transforman en otros productos diferentes. En el ejemplo siguiente, se trata de calcular las cantidades de cada producto que participan en la reacción, igualando el número de átomos que intervienen antes y después de la reacción. Naturalmente, debe ser un número entero de átomos.

Calcularemos los coeficientes de la siguiente reacción química, correspondiente a la fotosíntesis.

$$aCO_2 + bH_2O \text{ ------------ } cC_6H_{12}0_6 + d0_2$$

El número de átomos de C, H y O debe ser el mismo a ambos lados de la reacción, para ello debemos hallar los valores de *a, b, c y d.* Comenzamos planteando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C: \ a = 6c \\ O: 2a + b = 6c + 2d \\ H: 2b = 12c \end{cases} \text{ entonces: } \begin{cases} a - 6c = 0 \\ 2a + b - 6c - 2d = 0 \\ 2b - 12c = 0 \end{cases}$$

Se tiene así un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas: a, b, c y d

El sistema resultará compatible indeterminado, para poder dar una de las infinitas soluciones, operando algebraicamente, se obtiene el siguiente sistema equivalente al original y se resuelve.

$$\begin{cases} a - 6c = 0 \\ 2b - 12c = 0 \\ 6c - 2d = 0 \end{cases}$$

Haciendo $2d = 2t$

$$c = 2t/6 = t/3$$

$$b = 12c/2 = 12(t/3)/2 = 2t$$

$$a = 6c = 2t$$

$$2d = 2t$$

Puesto que sólo interesan soluciones con valores enteros y lo más pequeños posible, se elige t = 3 y se tiene así:

$$a = 2.3 = 6; \quad kb = 2.3 = 6; \quad c = 3/3 = 1; \quad 2d = 2.3 = 6$$

Quedando la ecuación balanceada de la siguiente forma:

$6CO_2 + 6H_2O$ ------------ $C_6H_{12}0_6 + 60_2$

Cálculo de la fotosíntesis

La fotosíntesis es la conversión de energía luminosa en energía química, que tiene lugar en los cloroplastos de las células eucariotas o en los tilacoides y el protoplasma de las células procariotas. Implica tanto la recepción de energía lumínica, su conversión en energía química (ATP y NADPH) así como la fijación del dióxido de carbono en compuestos orgánicos (Curtis, 2006).

Existen varias formas de estimar la cantidad de luz acumulada en un intervalo de tiempo. Un método consiste en realizar mediciones diarias de la intensidad de luz en distintos intervalos de tiempo y calcular la integral bajo las curvas generadas.

La cantidad de luz recibida se mide en lux/hora. El lux es la unidad derivada del Sistema Internacional de Unidades para la iluminancia o nivel de iluminación.

En la siguiente tabla, se muestran los valores de intensidad de luz registrados en intervalos de una hora ($\Delta t=1$; n=15h). Se considera la hora 0 el amanecer (6 hs. AM)

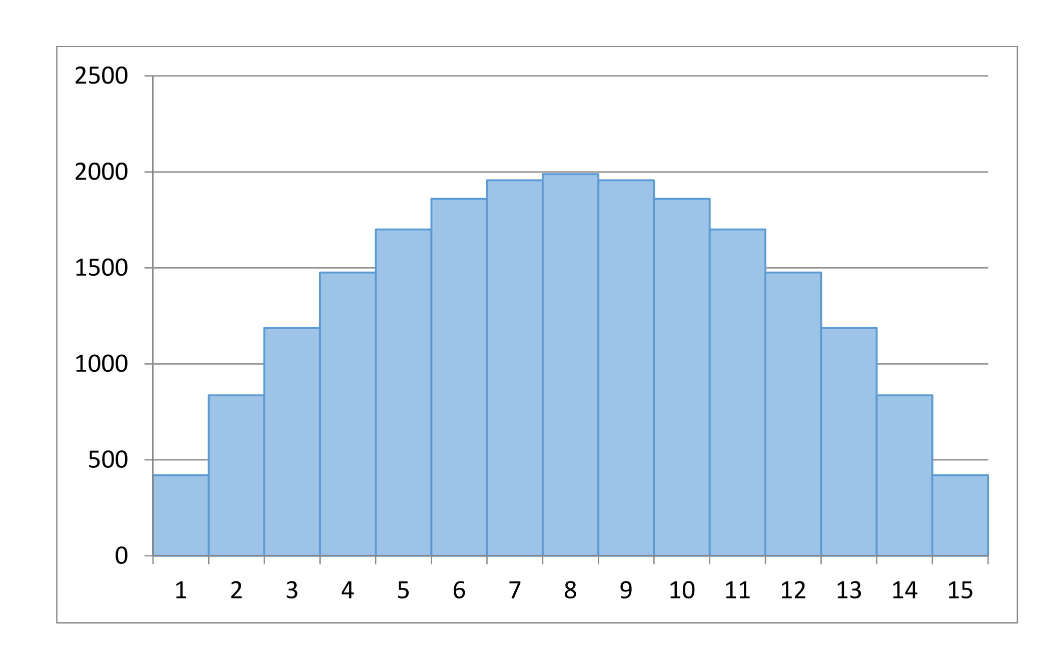
Hora	Intensidad de luz
1	420
2	836
3	1188
4	1476
5	1700
6	1860
7	1956
8	1988
9	1956
10	1860
11	1700
12	1476
13	1188
14	836
15	420

En el siguiente gráfico, se representan los datos de la tabla. Podemos estimar la cantidad de luz acumulada, haciendo el cálculo del área total bajo la curva de la siguiente manera.

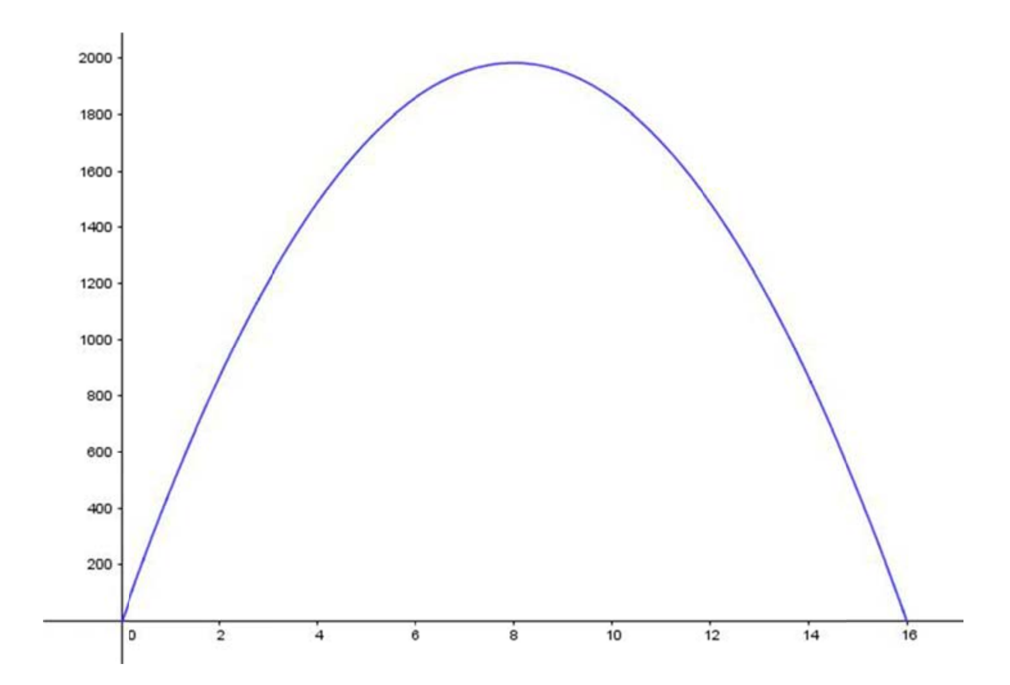
$$Luz\ acumulada = área\ total =$$

$$= 420.1 + 836.1 + 1188.1 + 1476.1 + 1700.1 + 1860.1 + 1956.1 + 1988.1 + 1956.1 + 1860.1 + 1700.1 + 1476.1 + 1188.1 + 836.1 + 420.1 = 20860\ lux/hora$$

El cálculo representa la suma del área de cada rectángulo.



Si queremos obtener una mejor aproximación de la cantidad de luz acumulada deberíamos realizar mediciones en intervalo de tiempo más cortos. La mejor aproximación estará dada entonces por el límite de la suma (cuando $\Delta t \to 0$ y por lo tanto $n \to \infty$) y representaría el área total bajo la curva $f(t) = -31t^2 + 496t$, la representación gráfica de esta función se ajusta de manera adecuada a los datos representados en la tabla.



Podemos decir entonces, que en nuestro problema de fotosíntesis el área comprendida entre el eje horizontal y la curva $f(t) = -31t^2 + 496t$ representa la intensidad de la luz acumulada en el período desde t = 0 hasta t = 16. Pero, ¿podemos obtener exactamente ese valor?

El método de aproximación que hemos usado es básico para la comprensión intuitiva del cálculo integral, del cual haremos uso a continuación:

$$\int_0^{16} (-31t^2 + 496t)dt = \frac{-31t^3}{3} + \frac{496t^2}{2}]_0^{16} = \left[-(\frac{126976}{3} + 63488\right] - [0] = 21162,67\frac{lux}{hora}$$

El estudio y conocimiento de esta variable, puede ser útil para optimizar el crecimiento, desarrollo, productividad y calidad de las plantas

Bibliografía

Blanchard P, Devaney RL, Hall GR. (1998). Ecuaciones Diferenciales. International Thomson Editores. México

Cisneros, Iván Alonso. (2014) Modelos matemáticos para la diabetes. Trabajo de Fin de Grado para acceder al Grado en Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. Accedido de:

http://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/4486/Ivan%20Alonso%20Cisneros.pdf?sequence=1

Cisneros, Iván Alonso. (2015) Técnicas de control en modelos matemáticos para la diabetes. Trabajo de Fin de Máster para acceder al Máster en Matemáticas y Computación. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. Accedido de: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/7851/Ivan%20Alonso%20Cisneros.pdf?sequence=1

Curtis Helena; Barnes,Sue N.; Schnek Adriana; Flores Graciela. (2006) Biología. Sexta edición. Ed Médica Panamericana. Accedido de: http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Lafotosintesis.htm

Fabrizio, María del Carmen. (2011) Modelización y estudio de la propagación de la infección por *Trypanosomacruzi* en escenarios rural y urbano. Tesis Doctoral Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires. Accedido de: http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_4927_Fabrizio.pdf

Fernández Slezak, Diego. (2010) Estimación de parámetros en modelos biológicos complejos. Aplicación a modelos de crecimiento tumoral. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. Accedido de: http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_4766_FernandezSlezak.pdf

http://estadisticaactuarial.wikifoundry.com/page/Benjamin+Gompertz

Guyton, C.G. y Hall, J.E. (2011) Tratado de Fisiología Médica. 12ª Edición. Editorial Elsevier. Accedido de: http://ricuti.com.ar/no_me_salen/TERMO/ter34.html

Leah, Edelstein-Keshet ; Springer (2005): Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.

Matemáticas Aplicadas a la Biología. Grado en Biología por la Universidad de Sevilla Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico Universidad de Sevilla Curso 2013/14 Accedido de: http://personal.us.es/pmr/images/pdfs/gb-mab-apuntes.pdf

Merchante Alfaro A (2008) Modelo mínimo. Avances en Diabetología. Vol. 24 N° 4, p. 312-319. Accedido de: http://www.avancesendiabetologia.org/gestor/upload/revistaAvances/24-4-6.pdf

WHO. (2016). La enfermedad de Chagas (tripanosomiasis americana). Datos y cifras. Accedido de: http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs340/es/

Los autores

Cappello, Viviana

Analista Universitario en Sistemas de la UTN FRLP. Ingeniera en Sistemas de Información de la UTN FRLP. Cursó el profesorado de Matemática en FaHCE UNLP. Maestría en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Facultad de Informática UNLP. Magister en Tecnología Educativa, Universidad Autónoma de Madrid. Actualmente se desempeña como Profesora Adjunta Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM UNLP. JTP ordinaria de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Profesora Adjunta de Álgebra y Geometría Analítica en la UTN FRLP. Profesora de Informática en la ETT 2 de Berisso. Ha participado de Congresos Nacionales e Internacionales de Enseñanza de la matemática. Ha participado en Proyectos de extensión de la UNLP. Mantiene y administra la web de la cátedra de la FCNyM, FAU y plataforma virtual educativa de la ESNM.

Herrera, Romina

Profesora de Física y Matemática, título otorgado por la FAHCE, UNLP. Cursó la Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales orientación Matemática en la misma casa de estudios. Actualmente se desempeña como Profesora Adjunta Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM, UNLP. Es Ayudante Diplomada de Matemática Nivel 1 de la FAU, UNLP. Es docente investigadora categoría V. Forma parte del Equipo Técnico Regional, Matemática, de Formación Continua de la Provincia de Bs. As. Profesora de Didáctica de la Matemática en ISFDyT N° 9. Profesora de Matemática EET 2 Berisso. Obtuvo mención proyecto articulación entre niveles, JUREC (2012). Dictó talleres a docentes. Participa de congresos de matemática vinculados a las ciencias naturales, EDIMAT 2015. Cursó seminario de posgrado de arqueología, escuela de verano, UNLP (2016).

Amor, Verónica

Licenciada en Biología Orientación Zoología, título otorgado por la Facultad de Ciencias Naturales y Museo, UNLP. Cursa la carrera de Microbiología Clínica e Industrial de la Facultad de Ciencias Veterinarias, UNLP y el Tramo de Formación Pedagógica, ISFDyT N° 9. Actualmente se desempeña como Ayudante Diplomada Ordinaria de la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM, UNLP. Profesora de Biología y Ciencias

de la Tierra de la EES N° 3 de Berisso. Participa desde el año 2009 como docente del Curso Introductorio a la FCNyM, UNLP en las áreas de Matemática y Biología. Ha sido integrante de equipos de investigación en las áreas de Parasitología (CEPAVE) y Micología Médica e Industrial (Facultad de Ciencias Veterinarias, UNLP).

Di Paolantonio, Anyelen

Profesora de Matemática, título otorgado por la FAHCE de UNLP. Actualmente se desempeña como Ayudante Diplomada Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM de UNLP. Es también Ayudante Diplomada Ordinaria en Elementos de Matemática y Física, Nivel I de la FAU de UNLP y en Probabilidad y Estadística de la Facultad de Ingeniería de UNLP. Profesora a cargo de Matemática de 2° Año del CNLP y de Matemática Aplicada de 6° Año del LMV de la UNLP. Profesora de Ateneo de Matemática del ISFDyT N° 9. Ha sido Adscripta en las cátedras de Didácticas Específicas del Profesorado de Matemática de la UNLP. Ha participado de Congresos Nacionales e Internacionales de Enseñanza de la matemática. Ha participado en Proyectos de extensión de la UNLP. Participa como colaboradora en un PPID de la UNLP.

Lamenza, Guillermo

Doctor en Ciencias. Licenciado en Antropología. Especializado en arqueología y paleoclima en el Gran Chaco sudamericano en la División de Antropología (FCNyM – UNLP). Becario postdoctoral (CONICET). Ha dictado cursos y seminarios de grado y posgrado. Actualmente ayudante diplomado ordinario de la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática (FCNyM – UNLP). Producción científica que incluye artículos en revistas con referato (14); capítulos de libro (10); Libros (1); Trabajos en eventos C-T (44); Informes técnico (8) y Reseñas (1). Organizador y coordinador en eventos de C-T. Director e integrante de proyectos de investigación básica y extensión acreditados. Beneficiario de subsidios nacionales e internacionales. Distinción Dr. Joaquín V. González a los mejores promedios de la UNLP (2009) y el Premio internacional ¨Dra. Branislava Susnik¨ otorgado por el CEADUC, MEAB y AIP (2013). Miembro de la Sociedad Argentina de Antropología.

Lorenzo, Jimena

Profesora de Matemática, título otorgado por la UNLP. Cursó la Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales en la misma casa de estudios superiores. Actualmente integra el Equipo de Gestión del Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la FaHCE UNLP. También, se desempeña como Ayudante diplomado en Didáctica Específica II y Prácticas Docente en Matemática para la carrera Profesorado de Matemática. Ayudante diplomado en la cátedra de Matemática en la FCNyM UNLP. Es docente investigadora categoría V y forma parte del Proyecto de Investigación "Relación con el saber y diversidad en el aula de matemática de la escuela Secundaria básica de hoy. Un estudio exploratorio en el Gran La Plata" Profesora de Estadística para la carrera Tecnicatura Superior en Seguridad e Higiene Ambiental en el ISFT N°202, de Berisso.

Antromática : aporte para la formación en matemática de estudiantes de Antropología y Profesorado de Biología / Viviana Cappello ... [et al.] ; coordinación general de Viviana Cappello ; Romina Herrera ; prólogo de Ricardo Alberto Massucco. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1484-2

1. Matemática. 2. Antropología. 3. Biología. I. Cappello, Viviana II. Cappello, Viviana , coord. III. Herrera, Romina, coord. IV. Massucco, Ricardo Alberto , prolog.
CDD 510.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2017
ISBN 978-950-34-1484-2





